

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

58e jaargang
1982/1983
no. 3
november

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: Dr. F. Goffree - W. Kleijne - L. A. G. M. Muskens - W. P. de Porto - P. E. de Roest (secretaris) - P. Th. Sanders - Mw. H. S. Susijn-van Zaale (eindredactrice) - Dr. P. G. J. Vredenduin (penningmeester) - B. Zwaneveld (hoofdredacteur)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie: F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 45,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 30,–; contributie zonder Euclides *f* 25,–.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen en mededelingen worden in tweevoud ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9'', 1078 JX Amsterdam, tel. 020-73 89 12. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van $1^1/_2$.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-55 08 34.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-24 02, girorekening 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 42,40. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 24,65. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen, tel. 050-16 21 89. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers *f* 7,– (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-6 20 78/6 20 79. Telex 33014.

ISSN 0165-0394

Setvorming, wat valt er aan te doen?

W. J. BOS

1 Inleiding

Van 't Riet heeft in een vijftal artikelen in Euclides aandacht besteed aan setvorming en de verschijnselen Einstellung en rigiditeit (*Euclides* 55: 2 en 7; 56: 1, 3 en 8).
Einstellung is het verschijnsel dat iemand een bepaalde methode blijft gebruiken in een situatie waar een eenvoudiger, hem bekende, methode mogelijk is. Als iemand een methode blijft proberen in een situatie waar deze niet toepasbaar is, terwijl hem een wel bruikbare methode bekend is, dan is er sprake van *rigiditeit* (zie de definitie van v. 't R.: 55, 2, p. 44). Beide verschijnselen worden door v. 't R. aspekten van *setvorming* genoemd.
Vooral uit de voorbeelden in het laatste artikel is wel duidelijk hoe belangrijk deze verschijnselen zijn voor het wiskunde-onderwijs. Zij roepen in het bijzonder vragen op t.a.v. de plaats en de behandeling van algoritmen: Welke wel, welke niet? Hoe behandelen we ze? Enz. Maar er rijzen ook vragen betreffende setvorming bij andere, niet algoritmische methoden, voorschriften, werkgewoonten en heuristieken.
Setvorming treedt trouwens ook elders op. Is de Einstellung en rigiditeit in de volgende voorbeelden vergelijkbaar met die bij de experimenten van v. 't R.?

a Enige leden van de schoolleiding rekenen m.b.v. rekenmachientjes het gemiddelde van de schoolonderzoeken per vak uit. Eén van hen berekent ook het gemiddelde van 6,2, 6,3 en 6,4 met het machientje. De sukkel geeft wiskunde.
b De heer A. gaat bij uitzondering eens per fiets naar kantoor. Hij is evenwel in het verkeer niet als fietser maar als autorijder ingesteld. Bij een zijstraat komt er een auto van links. Hij neemt voorrang...
c Bekend raadsel: Bij een aanrijding wordt een man gedood en zijn zoon wordt ernstig gewond naar het ziekenhuis gebracht. Daar zegt de chirurg: 'Ik kan hem niet opereren, want het is mijn zoon'. Hoe kan dat? Is 'rolpatroon' een 'set'? Vertoont u rigiditeit?
d Lang geleden bestond het schriftelijk eindexamen gymnasium voor gonio/analytische meetkunde uit drie opgaven, waarbij één gonio/trigono-vraagstuk. In het jaar x was voor de oplossing van het gonio-vraagstuk slechts de definitie van de tangens nodig (en wat gereken met verhoudingen). Dit vraagstuk werd slecht gemaakt. De leerlingen zochten er te veel achter. Is een verwachtingspatroon ook een set?

Is elke 'set' een 'habit'? Of andersom: elke 'habit' een 'set'? Of hebben set en habit niets met elkaar te maken? Ik weet niet hoe de verschillende richtingen in de psychologie nu tegenover deze problemen staan. Heeft niet elke gewoonte of werkwijze ook een eenzijdigheid?
Het lijkt mij in ieder geval nuttig als wij inzien dat we allemaal vaak last hebben van 'Einstellung' en niet geheel vrij zijn van 'rigiditeit'.
Wat betekent dit alles nu voor het wiskunde-onderwijs? Kan b.v. een goede werk- of denkgewoonte ook leiden tot Einstellung of zelfs rigiditeit?
Alvorens op deze vragen in te gaan lijkt het mij wenselijk stil te staan bij de experimenten van v. 't R. Voor zover ik heb kunnen nagaan was het de eerste keer dat in Euclides uitvoerig verslag werd uitgebracht over een psychologisch experiment. Nu heeft men, naar ik meen, in het 'veld' een vrij negatief oordeel over de betekenis van psychologische experimenten voor het onderwijs. Voor een groot deel komt dit doordat deze experimenten zich meestal afspelen in een laboratorium-situatie, die weinig gemeen heeft met een (volle) klas. De experimenten van v. 't R. evenwel hadden plaats in de klas. Daar hij bovendien verslag heeft uitgebracht over de organisatie van de experimenten kunnen belangstellenden de experimenten herhalen.
De waarde van de experimenten hangt nauw samen met de vraag in hoeverre het experimenteel leerproces overeenkomt met de processen die leidden tot de setvorming zoals deze blijkt uit de gegeven voorbeelden.
Eerst moeten mij echter nog een aantal opmerkingen betreffende de kannen-problemen van het hart.

2 Het 'leerproces' bij Luchins en Luchins

De kannen-problemen die Luchins en Luchins gebruiken bij hun experimenten zullen voor de lezers niet nieuw zijn geweest; ze waren zelfs op de televisie te zien. De wijze waarop ze door L. en L. gebruikt worden tot het verkrijgen van set-effecten was waarschijnlijk onbekend. U zult zich herinneren dat L. en L. na een inleidend voorbeeld hardnekkig proberen de proefpersonen wijs te maken dat het verstandig is bij kannen-problemen steeds te nemen B-A-2C (kan B vullen, daaruit de inhoud van kan A weggieten en dan nog twee maal de inhoud van kan C eraf nemen). Dat is dan hun 'leerproces'. Blijkbaar wordt ervan uitgegaan dat geen van de proefpersonen kan begrijpen hoe het kannen-probleem werkelijk in elkaar zit.
Ik ben eigenlijk benieuwd wat onbevangen collega's dachten bij kennismaking met dit 'leerproces'. Als docent zullen zij zich toch wel afgevraagd hebben wat er in de hoofden van de proefpersonen omgegaan zou zijn. Ik heb geprobeerd een min of meer analoog 'leerproces' te vinden dat werkelijk voorkomt. Ik ben daar niet in geslaagd. Een beetje in de buurt komt een voorval dat van Streun vermeldt in 'Heuristisch wiskunde-onderwijs':

Op bord staat uitgewerkt:
$\sqrt{62} \cdot \sqrt{93} = \sqrt{31 \cdot 2} \cdot \sqrt{31 \cdot 3} = 31\sqrt{6}$
$\sqrt{8} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 2} \cdot \sqrt{4 \cdot 3} = 4\sqrt{6}$
$\sqrt{30} \cdot \sqrt{15} = \sqrt{15 \cdot 2} \cdot \sqrt{15} = 15\sqrt{2}$

Een vinger van één van de betere leerlingen: 'Meneer, de factor, die er voor moet, krijg je zeker door van de grootste de kleinste af te trekken.'

Het verschil met het leerproces van L. en L. is toch wel groot. Hier vraagt een leerling naar de mogelijkheid een door hem geconstateerde, maar toevallige, regelmaat te generaliseren; L. en L. willen dat de door hen geconstrueerde regelmaat wordt gegeneraliseerd. Bij de leerlingen wordt de indruk gewekt dat ze een algoritme leren (v. 't R. spreekt hier van quasi-algoritme, 56, 1, p. 24). Ook bij de kritische problemen gaat deze regel op. Is het een wonder dat 83% 'Einstellung' vertoont en 64% faalt bij het extinktieprobleem?

Slimme leerlingen zullen begrijpen dat ze voor de gek gehouden worden. Wie zich het concrete kannenprobleem voorstelt kan niet geloven in de 'setregel' B - A - 2C. Wat dan? Ze zullen waarschijnlijk de schouders ophalen en zeggen: 'Vooruit dan maar, ze willen het blijkbaar zo.'

Het is wel sterk dat L. en L. op grond van deze experimenten tot de conclusie komen dat het rekenonderwijs te schools is. Dat is waarschijnlijk wel waar, maar is er een schoolser leerproces denkbaar dan wat hier voorgezet wordt?

L. en L. probeerden het ook nog met echte kannen en vonden ongeveer evenveel Einstellung en rigiditeit. Ook hier vraag ik me af wat de proefpersonen gedacht hebben. Met echte kannen moet het nog duidelijker zijn dat de 'setregel' een onzinnige regel is. Maar als dan blijkt dat die onzinnige regel een tijdlang keurig de oplossing geeft?

De mening van v. 't R. dat dit experiment een argument levert tegen konkretisering van het wiskunde-onderwijs (55, 7, p. 310), kan ik niet delen. Hier moet ik echter aan toevoegen dat, hoe dwaas dit africhtingsproces ook is, het toch mogelijk is dat de resultaten van deze experimenten ook van toepassing zijn op gewone leerprocessen. Gelukkig hebben de experimenten van v. 't R. betrekking op echte leerprocessen: aanvullen van rijen, werken met wortelvormen.

3 De experimenten van van 't Riet

Hoewel het aanvullen van rijen niet tot de gewone leerstof behoort en ook de beide algoritmen die zich voor kunnen doen bij toepassing van $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ in het normale onderwijs nauwelijks een plaats krijgen, passen deze onderwerpen toch wel heel wat beter in de gewone gang van zaken dan de kannen-problemen. Zoals u gezien zult hebben bestond het onderzoek met beide probleemtypen uit twee fasen: 1) leerfase, waarin twee algoritmen werden geleerd, 2) E-test bestaande uit 10 problemen waarbij uitsluitend de set-algoritme werd geoefend, 4 kritische problemen (ter bepaling van de Einstellung) en 4 extinktie-problemen (voor het bepalen van de rigiditeit). De E-test werd ongeveer 48 uur na de eerste fase uitgevoerd.

De vraag rijst nu in hoeverre bij het gewone onderwijs dergelijke processen van setvorming optreden. Komt het voor dat na het behandelen en oefenen van een tweetal (of meer) algoritmen en een zekere onderbreking uitsluitend één van die algoritmen herhaald wordt en direct gevolgd wordt door een proefwerk over de verschillende algoritmen?

Op het eerste gezicht zou men zeggen: 'neen, dat gebeurt nooit, dat zou te dwaas

zijn'. Toch herinner ik mij dat ongeveer deze gang van zaken de oorzaak bleek van een zeer slecht gemaakt proefwerk over tweedegraadsvergelijkingen. In het betreffende hoofdstuk was de kwadraatafsplitsing behandeld en geoefend en hieruit was door generalisatie de *abc*-formule afgeleid. Ook de oplossing door ontbinding en, als ik het wel heb, vergelijkingen van de gedaante $AB = AC$ waren ter sprake gekomen en geoefend. De les vóór het proefwerk kwamen er nogal wat vragen uit de klas over kwadraatafsplitsing. De docent ging daar uitgebreid op in, maar andere oplossingsmethoden werden niet meer aan de orde gesteld. Bij het proefwerk de volgende dag, u zult het wel geraden hebben, werd door vele leerlingen steeds maar de kwadraatafsplitsing gebruikt, ook in gevallen waar een eenvoudige ontbinding mogelijk was. De concentratie op de, moeilijk gevonden methode van kwadraatafsplitsing had duidelijk Einstellungs-effecten, die blijkbaar ook niet waren opgeheven door de bestudering van het hoofdstuk thuis.

Dit verschijnsel komt nogal eens voor, maar dan in minder sterke mate. Zo kan men vaak Einstellung op het moeilijkste onderdeel constateren bij ijverige, zwakke leerlingen. Zij concentreren zich daarop zo sterk dat zij eenvoudige problemen niet of te ingewikkeld oplossen.

Deze gevallen blijven evenwel uitzonderingen. In het algemeen moet, meen ik, toch wel gezegd worden dat de experimentele setvorming weinig overeenkomt met de processen die setvorming teweegbrengen in het onderwijs. Dit noopt tot voorzichtigheid bij het trekken van conclusies uit het onderzoek t.a.v. het wikunde-onderwijs.

De belangrijkste conclusie van het onderzoek heeft betrekking op de gevolgen van verschillende manieren van aanbieden. Van 't R. stelt tegenover BLOK-instruktie (waarbij eerst de set-algoritme geleerd wordt en dan de extinktie-algoritme), een instruktie waarbij afwisselend een set- en een extinktie-algoritme worden uitgelegd en geoefend. Hij noemt dit MIXED-instruktie. Hiertegen heb ik bezwaar. Mixed-instruktie (of mixed-herhaling) van twee soorten opgaven moet niet 'om en om' gegeven worden. De bedoeling van 'gemengd' is immers dat de leerlingen leren hoe ze kunnen *nagaan* met welk soort opgave ze te maken hebben (hier welke algoritme). Om en om is niet goed gemengd; het zou zelfs kunnen leiden tot een 'set' op 'om en om'. Leerlingen hebben zo iets gauw door. De niet aflatende waarschuwingen van het CITO bij de meerkeuzetoetsen zijn niet overbodig. Ik moet dan ook zeggen dat naar mijn mening de waarde van het aanbiedingsonderzoek twijfelachtig is.

Het is wel bijzonder interessant dat BLOK of MIXED bij de getallenrijen praktisch niets uitmaakt, terwijl dat wel het geval is bij de wortelvormen. Na de MIXED-aanbieding van de wortelvormen treedt haast geen Einstellung of rigiditeit op. Het 'om en om' mixen werkt bij de rijen niet en bij de wortels wel! Hoe komt dat? Meestal dienen gemengde opgaven om te leren *begrijpen* wanneer de verschillende methoden gebruikt moeten worden. Het inzicht in die methoden wordt daardoor versterkt en de leerlingen worden zich bewust van de draagwijdte van de methoden; vaak ontstaat een soort 'zoekregel'. Zowel bij de getallenrijen als bij de wortelvormen valt er bij het onderscheiden van de beide algoritmen niets te begrijpen. Bij de getallenrijen zou de zoekregel kunnen luiden: probeer eerst de ene manier, lukt dit niet dan de andere manier. Beter

nog: probeer eerst de tweede algoritme (oneven nummers). Bij de wortelvormen zou de beste werkwijze zijn: kijkt eerst of beide wortels in de tabel staan, dan eerst worteltrekken, zo niet, dan eerst vermenigvuldigen. Natuurlijk komt deze situatie ook wel eens in het onderwijs voor. Bij tweedegraadsvergelijkingen b.v.: kijk eerst of het linkerlid te ontbinden is, zo niet pas dan de algemene formule toe. Hoe kan het verschil in effect van de mixed-behandeling nu verklaard worden? Uit het verslag is niet op te maken hoe de leerlingen aan hun oplossingen komen. Ook weet ik niet of na de mixed-aanbieding van de getallenrijen bij de kritische problemen een 'set' op 'om en om' te constateren viel, hetgeen mij zeer wel mogelijk lijkt. Van 't Riet's verklaring voor het grotere seteffect bij de wortelvormen vind ik zeer aannemelijk; de problemen zijn minder complex. Ze zijn zelfs zeer simpel: tabelletje kijken en vermenigvuldigen. Voor de leerlingen een vrij 'stom' werk. Het is dan ook geen wonder dat bij blok-aanbieding sterke setvorming optreedt. Twee dagen later zijn veel leerlingen gewoon vergeten dat er *twee* methoden waren! Het is echter begrijpelijk dat ze dat nog wel weten na de mixed-aanbieding, zelfs in de 'om en om' vorm. De geringe Einstellung en rigiditeit bij de mixed-aanbieding is dus goed verklaarbaar.
Maar waarom werkt de mixed-aanbieding niet of nauwelijks bij de getallenrijen? Het lijkt mij duidelijk dat bij de meer gecompliceerde rijen de aandacht gericht blijft op het aanvullen zelf, ook tijdens de om en om mixing. Ik vermoed dat goed mixen ook hier tot een aanzienlijke vermindering van Einstellung en rigiditeit zou leiden, omdat het kiezen dan niet meer mechanisch kan gaan. Natuurlijk is dit giswerk. De juistheid van dit vermoeden kan slechts blijken uit een nieuw experimenteel onderzoek. Daarbij zou ook nagegaan kunnen worden wat het effect is van het leren van een zoekregel (kijk eerst of het op de ene manier gaat, zo niet probeer dan de andere). Dat leren zou dan nog op twee manieren kunnen gebeuren:

1 de regel geven en laten leren
2 de regel laten ontdekken

Maar hoe doe je dat in een dergelijke experimentele situatie?
Tot slot van dit gedeelte wil ik nog opmerken dat ik niettegenstaande mijn kritiek veel waardering heb voor de artikelen van van 't Riet. De verschijnselen Einstellung en rigiditeit zijn onder de aandacht van de docenten wiskunde gebracht en de gevolgen van setvorming voor het onderwijs zijn met vele voorbeelden duidelijk gemaakt. De vraag rijst of het mogelijk is ongewenste setvorming te vermijden of althans te verminderen. Voor een nadere beschouwing van deze vraag lijkt het mij wenselijk de voorbeelden van van 't Riet in twee groepen te splitsen.

4 Twee groepen voorbeelden

a *Setvorming als gevolg van onvoldoend verwerkte algoritmen.*
Vb.: Het oplossen van vergelijkingen met breuken alsof het gebroken vergelijkingen zijn (zie v. 't Riet: 56, 8, p. 367).
De moeilijke algoritme wordt hier ook gebruikt in het eenvoudige geval. De leerlingen hebben de werkwijze met moeite onder de knie gekregen, maar het

onderscheid tussen een vergelijking met breuken en een gebroken vergelijking èn het gevaar van 'invoeren' hebben ze niet begrepen. Dit voorbeeld sluit aan bij het door mij in (3) vermelde voorval.
Rigiditeit van deze aard kan men b.v. aantreffen als tussen een aantal kwadratische ongelijkheden een eerstegraads ongelijkheid voorkomt. De eerstegraads ongelijkheid wordt dan nogal eens opgelost alsof het een tweedegraads was, met alle gevolgen van dien. Het is typerend voor deze gevallen dat de leerling duidelijk aan de algoritme vastzit, deze niet goed begrepen heeft en hem te mechanisch toepast.

b *Setvorming door sterke verwachtingspatronen.*
Vb. 1: Herleid $(1 + x + 6)^2$ (zie 56, 8, p. 364).
De mogelijkheid de gegeven drieterm te vereenvoudigen wordt over het hoofd gezien doordat de leerling geheel ingesteld is op het herleiden van het kwadraat van een drieterm. Er is hier geen kwestie van iets-niet-goed-begrepen-hebben. De leerling is 'erin gelopen'.
Vb. 2: Bereken de afstand van de punten $(-3, 5)$ en $(7, 5)$ (zie 56, 8, p. 366).
De opgave afstand van twee punten aktiveert kennis: de Pythagorasformule. Er is uiteraard geen enkele reden om aan te nemen dat deze formule niet goed begrepen is. De korte weg is hier van wezenlijk andere aard. Een leerling die een figuur maakt (of eraan denkt) ziet direct het antwoord. Hij werkt op deze manier omdat hij geleerd heeft en hopelijk ook ingezien heeft dat dit verstandig is. De Einstellung bij deze gevallen is een gevolg van een sterk verwachtingspatroon en aan die verwachtingen wordt ook voldaan. Bij het tweede voorbeeld speelt ook nog het andere niveau van de korte oplossing een rol (Vergelijk hiermee mijn voorbeeld (a) uit de inleiding).
Een voorbeeld van rigiditeit door een sterke (en onjuiste) verwachting vindt u in het voorbeeld (d) uit de inleiding. Dit verschijnsel kan goed geobserveerd worden bij de gezelschapsspelletjes die erop berusten dat je op iets anders moet letten dan je denkt. Zeer bekend is het doorgeven van een schaar 'gewoon' of 'gekruist'. De grap is dan dat het helemaal niet om de schaar gaat, maar om al of niet gekruiste benen. Het is zeer opvallend dat juist intelligente, denkend ingestelde personen het zo vaak niet gauw doorhebben.
Bij al deze voorbeelden van groep (b) is het niet een kwestie van begrijpen maar van over het hoofd zien of erin lopen.
Bij de door v. 't R. gegeven voorbeelden zijn er enkele waarbij naar mijn mening eigenlijk geen sprake is van Einstellung of rigiditeit. Bij het voorbeeld van twee vergelijkingen met twee onbekenden (56, 8, p. 363), waar veel leerlingen elimineren door optellen, terwijl aftrekken veel eenvoudiger is, krijg ik uit de tekst de indruk dat aftrekken niet 'tot het gedragspotentieel van de proefpersoon behoort' (zie de def.: 55, 2, p. 44). Dan is er geen sprake van Einstellung, maar hebben we gewoon te maken met de gevolgen van een eenzijdige behandeling. Hetzelfde lijkt mij het geval bij x of y elimineren uit een stelsel vergelijkingen. Als een leerling niet weet dat soms het een en soms het ander makkelijker is, ontbreekt er veel aan de behandeling. Dat leerlingen vaak niet kunnen overzien wat het eenvoudigst is, heeft natuurlijk niets met setgedrag te maken.

5 Setvorming als gevolg van onvoldoend verwerkte algoritmen (groep a)

Natuurlijk hebben lang niet alle gebreken die optreden bij het werken met algoritmen te maken met Einstellung of rigiditeit. Door elkaar halen van regels, zoals b.v. het 'vereenvoudigen' van een gebroken functie door de breuken 'weg te maken', het onjuist toepassen of onvoldoend kennen van formules enz. heeft niets te maken met setvorming.
Van de voorbeelden die v. 't R. geeft, hoort wel tot deze groep: het toepassen van de abc-formule in eenvoudige gevallen en b.v. het altijd maar weer haakjes wegmaken. Dit laatste had ernstige gevolgen bij deel 1a van het havo-examen 1974:

$f: x \to (x-2)^2(2x+1)$ en $g: x \to 2(2x+1)$
a Voor welke x geldt: $f(x) = g(x)$?

Het wegmaken van de haakjes is hier een voorbeeld van rigiditeit, tenminste als men aanneemt dat het oplossen van vergelijkingen van het type AB = AC tot het gedragspotentieel van de leerlingen behoort. Is dat niet het geval dan hebben we hier te maken met een opgave waarbij de leerling zelf een oplossing moet vinden die afwijkt van de hem vertrouwde werkwijze.
Verder behoort ook het differentiëren van ${}^a\log x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ met de quotientregel tot deze groep (56, 8, p. 365).
Het Einstellungs-effect treedt naar mijn ervaring hierbij veel minder vaak op als eerst ${}^3\log x$ gedifferentieerd moet worden en bovendien uitdrukkingen als ln 3, $\sqrt{2}$, enz. reeds eerder als coëfficienten zijn gebruikt (wat in de leerboeken vaak niet het geval is).
Stellen wij nu de vraag: hoe kan setvorming door onverwerkte algoritmen verminderd resp. vermeden worden? Het antwoord ligt voor de hand: Dit kan alleen door de algoritmen beter te behandelen. Als algoritmen goed begrepen zijn en vooral als ook hun draagwijdte doorzien wordt, zal in ieder geval van rigiditeit geen sprake zijn. Een kortere weg kan uiteraard ook dan nog wel over het hoofd gezien worden.
Een uitvoerige bespreking van de didactische problemen bij het leren van algoritmen zou hier te ver voeren. In de boekjes van Dormolen, in het bijzonder in 'Vaardigheden', wordt duidelijk aangegeven hoe trucmatige routine vermeden kan worden. Ook is het welhaast overbodig op te merken dat een algoritme geen uitgangspunt maar een (voorlopig) eindpunt moet zijn van de verwerking van de stof. De algoritme is dan een door de leerling zelf ontdekte samenvatting van opgedane ervaringen. Een probleem blijft dat de leerboekschrijver vaak niet kan nalaten zijn regel te geven. Helaas brengt dit met zich mee dat de leerlingen vooruit bladerend, al te gauw weten hoe het moet.
Belangrijker misschien dan de behandeling van de algoritmen is de wijze waarop in het verdere onderwijs op de oude algoritmen wordt teruggekomen. In de eerste plaats is het nodig dat geregeld gevraagd wordt: 'waarom ook weer?' of 'hoe zat dat?'. Maar al te vaak komt daar niets van. De docent is allang blij als de goede algoritme gebruikt wordt. Erop terugkomen wordt als tijdverlies beschouwd. 'Ze

hebben het gehad, dus moeten ze het nu weten', is een zonderling misverstand, dat niet alleen bij wiskunde-docenten voorkomt. Ook wordt veelal niet ingezien dat niet alleen kennis gerepeteerd moet worden, maar dat ook begrip vaak opgefrist moet worden. Het is veel erger als een leerling niet begrijpt hoe je $(2x - 5)^2$ kunt herleiden dan dat hij de formule van $(A - B)^2$ niet meer weet.
De draagwijdte van de verschillende algoritmen kan naar mijn mening alleen goed doorzien worden als systematisch in herhalingen algoritmen met elkaar vergeleken worden, met behulp van simpele, goed gemengde opgaven. Hierbij moeten algoritmen die nogal eens aanleiding geven tot verwarring naast elkaar gesteld worden (vergelijkingen en ongelijkheden, zowel eerste- als hogeregraads, gehele en gebroken, enz.). Een herhaling dient een herordening te zijn ter integratie van de leerstof en mag niet alleen maar dienen om meer routine op te doen. Een herhaling bij een bepaald hoofdstuk mag zich dus ook niet beperken tot stof uit dat hoofdstuk, maar alle verwante of vergelijkbare oude leerstof moet erbij betrokken worden. Ik ken geen leerboek waarin dit ook maar enigszins gebeurt. Herhalingen lijken meestal op een uitverkoop van restanten, waarbij heel wat rariteiten!
Ik wil hier natuurlijk niet mee zeggen dat integratie van de stof de enige functie van een herhaling zou moeten zijn. Als op deze wijze op algoritmen teruggekomen wordt, mondeling en schriftelijk, is er een goede kans dat de routine op inzicht gebaseerd blijft en de leerling zich bewust is van de draagwijdte van de verschillende algoritmen. Daarmee wil ik niet beweren dat de setvorming dan geheel achterwege zal blijven. Ook wij zelf vertonen immers, juist waar het gaat om goed ingeslepen processen, nogal eens Einstellung en soms ook duidelijk rigiditeit. In ongewone situaties doen we uit gewoonte vaak onverstandige dingen!

6 Setvorming door sterke verwachtingspatronen (groep b)

Het zal de lezer niet ontgaan zijn dat de gegeven voorbeelden van groep (b) zeer verschillend van aard zijn. Enerzijds b.v. de onhandige herleiding van $(1 + x + 6)^2$, anderszijds het toepassen van de formule voor de afstand van twee punten in een geval waar die afstand zo te zien is.
Van 't Riet geeft een aantal voorbeelden die verwant zijn met bovenstaande onhandige herleiding:

Werk uit: $12a(9b + 3 - 8b)$; $(x^2 + 2x - x^2 - 2y)\ (2y + 2x)$, enz.

Hij maakt terecht bezwaar tegen dergelijke opgaven in een proefwerk als ze niet geoefend zijn. Mijn bezwaar gaat verder; het zijn opgaven die speciaal gemaakt zijn om de leerlingen erin te laten lopen. Dit bezwaar heb ik ook t.a.v. de voorbeelden van v. 't R. van 'sets op bepaalde regels van het differentiëren', zoals b.v.: Differentieer $x \to e^{\ln x}$, $x \to \ln 2x - \ln x$, enz. (56, 8, p. 366). Ik reken deze opgaven tot wat ik vroeger eens genoemd heb: 'hi-hi-wiskunde'. Het zijn bedrieglijke opgaven, speciaal geliefd bij beginnende docenten en een enkele leerboekschrijver. Zonder waarschuwing, zoals 'pas op' of zo iets, vind ik dit soort opgaven ontoelaatbaar. Klapsigaren en snoep van zeep dienen alleen op Sinterklaas aangeboden te worden! Vindt men deze problemen van belang dan

dient men ze op een zinvolle wijze te laten ontstaan. Vb.: $\{2(x + 3) + 1\}^2$. De betekenis van het eerst vereenvoudigen van de functie vóór differentiëren kan op natuurlijke wijze aan de orde komen bij de tweede afgeleide.
Reeds eerder heb ik opgemerkt dat bij dit soort gevallen van setgedrag, noch van onbegrip, noch van vastzitten sprake hoeft te zijn. De leerlingen lopen er in, ze zijn er eenvoudig niet op bedacht.
Maar ook als men dit soort opgaven niet speciaal construeert, zal het toch voorkomen dat een bepaalde struktuur zo suggestief werkt dat een eenvoudiger weg over het hoofd gezien wordt.
Zo zal b.v. bij het differentiëren van $\frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2}$ vaak meteen de quotiëntregel gebruikt worden in plaats van eerst te herleiden tot $x + 3(x - 2)^{-1}$. Maar ach, zo erg is dat toch niet. De eenvoudigste weg is misschien wel de mooiste, maar als je er lang naar moet zoeken, kun je net zo goed een wat langere nemen die zeker tot het doel voert.
Heel anders ligt het bij voorbeelden zoals de afstand van de punten $(-3, 5)$ en $(7, 5)$. Van 't R. noemt ook nog:

> Bepaal de vergelijking van de lijn door $(5, 4)$ en $(-1, 4)$ en van de lijn door $(-1, 1)$ en $(3, 3)$.

Het seteffect betekent in deze gevallen dat de leerling niet denkt aan een meer concrete methode. Wie zich wel voorstelt wat er aan de hand is (of dat tekent) zal dit vaak doen omdat hij zich deze goede werkwijze tot gewoonte heeft gemaakt. Daarmee rijst dan de vraag hoe wij een dergelijke gewoonte aan kunnen leren.
A. van Streun geeft in een artikel in Euclides (57, 1, p. 3 e.v.) het maken van een tekening als voorbeeld van een heuristische werkwijze. Hij is van mening dat dit heuristisch hulpmiddel weinig expliciet onderwezen wordt. Ik kan dit niet goed beoordelen. Ik dacht dat welhaast alle docenten in hun lessen zoveel mogelijk zouden visualiseren en hun leerlingen zouden aanraden, waar er ook maar enige aanleiding toe is, te proberen zich de situatie voor te stellen en zo mogelijk te tekenen. Natuurlijk leidt de goede raad en het goede voorbeeld niet snel tot algemene navolging. Er zal een groepje leerlingen zijn dat al spoedig de raad braaf opvolgt, verder zullen er zijn die dat pas gaan doen nadat de docent hun duidelijk heeft kunnen aantonen dat ze door het ontbreken van een figuur de mist zijn ingegaan; dan zullen er ook nog leerlingen zijn die de raad wel willen opvolgen maar deze op het kritieke moment vergeten en tenslotte zijn er ook nog die het eenvoudig nalaten omdat ze het te tijdrovend vinden of van mening blijven dat ze het wel zonder kunnen. Gewoontevorming is nu eenmaal een moeizaam proces!
We kunnen echter wel meer doen dan geregeld wijzen op deze werkwijze. We kunnen hen immers dwingen tot concretisering. We kunnen hen, veel meer dan gebruikelijk is, zelf voorbeelden laten geven en we kunnen veel meer gebruik maken van opgaven van de vorm:

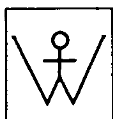
> Welke van de volgende beweringen zijn waar? Indien onwaar, geef dan een tegenvoorbeeld.

Dergelijke opgaven komen tegenwoordig wel in alle leerboeken voor, maar naar mijn mening toch nog veel te weinig. Ze kunnen practisch bij elk onderwerp gemaakt worden. Zoals ik reeds opmerkte heeft het laatste deel van dit artikel

betrekking op het 'leren oplossen' met behulp van een heuristische werkwijze. Daar elke heuristische werkwijze toch maar een beperkte bruikbaarheid heeft, kan men zich afvragen of ook heuristische werkwijzen niet tot setgedrag kunnen leiden. Van Streun noemt b.v. 'het laten vallen van een eis'. Als de opgave luidt: Bepaal de vergelijking van de cirkel door (0, 0), (1, 5) en (5, 1), dan zal bij deze heuristische werkwijze een flinke omweg gemaakt worden. Is dat dan Einstellung op een heuristiek?

7 Samenvatting

Van 't Riet heeft terecht aandacht gevraagd voor setvorming bij het oplossen van vraagstukken. Hoewel er bezwaren zijn aan te voeren tegen zijn experimenten, in het bijzonder tegen zijn aanbiedings-onderzoek, geven zijn ervaringen toch een goed beeld van de verschijnselen Einstellung en rigiditeit. Deze spelen een grote rol bij het onhandig oplossen, resp. het falen van onze leerlingen.
Een analyse van de verschillen tussen beide experimenten leidde tot het vermoeden dat een goede mixed-aanbieding toch wel altijd tot een geringere setvorming zal voeren. In de praktijk van het wiskunde-onderwijs is setgedrag meestal een aanwijzing dat bepaalde algoritmen onvoldoende verwerkt zijn. Bij pogingen hierin verbetering te brengen is de wijze van herhalen van de leerstof van groot belang.
In het dagelijks leven treedt setgedrag op in ongewone en vooral misleidende situaties.
Bij het wiskunde-onderwijs dienen opgaven waarvan een onjuiste suggestie uitgaat vermeden te worden.
Setgedrag kan ook voortkomen uit een te eenzijdige probleemaanpak. Een grotere aandacht voor heuristische methoden is daarom gewenst.



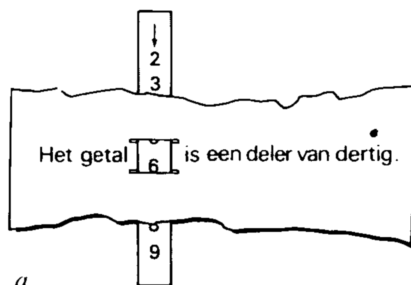
Met wiskunde meer vrouw(?)*)

FRANCIS MEESTER

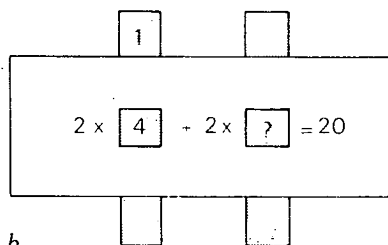
De titel van dit artikel 'Met wiskunde meer vrouw(?)' is een bewering met een vraagteken. Een vraagteken, weliswaar tussen haakjes, maar ook haakjes hebben betekenis in de wiskunde. Haakjes kun je wegwerken.
Ik zal eerst de waarheid van de bewering 'Met wiskunde meer vrouw' laten zien. Daarna wil ik op een deelaspekt aantonen, waardoor wiskundeprestaties bij meisjes op dit moment achterblijven bij die van jongens. Daarvoor moeten we weten wat er allemaal meespeelt om tot een prestatie bij de wiskunde te komen. Daarvoor ga ik o.a. naar leerlingkenmerken en motivatie kijken. Verschillende aspekten zal ik wat verder uitdiepen, met name die relevant zijn voor meisjes. Daaruit volgen keuzes, konsekwenties, en aanbevelingen voor de wiskundewereld.

I Bewering

In de oude delen van Passen & Meten (1), waaraan ik een aantal jaren als auteur heb meegewerkt, maakten we leerlingen gevoelig voor variabelen mede op de volgende manier: een bewering stond op een strook opgeschreven met één of twee open vensters. Twee stroken met getallen werden er doorheen getrokken; iedere keer ontstond er een bewering, die waar of niet waar was.



a

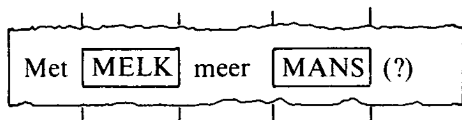


b

Van deze methode wil ik gebruik maken om de bewering 'Met wiskunde meer

Noot
*)Dit artikel is een weerslag van een lezing, die ik hield in april '82 bij het Wiskundig Genootschap in de sektie Didaktiek. De 'spreektaal' is er wellicht nog in te herkennen.

vrouw' te onderzoeken. Eerst wat sorteervoorbeelden:



Dat dit een ware bewering is, wordt algemeen aangenomen. De waarheid werd even in twijfel getrokken toen er wat kritischer geluiden over de melk klonken, maar dat hebben we weer snel vergeten. Met 'MANS' wordt de hele bevolking bedoeld, maar daarvoor wordt vaker man gebruikt. Eigenlijk moet er staan:

Met MELK meer MENS (?)

Dit is een ware bewering, hoewel met 'dat mens' zeker niet de hele populatie bedoeld wordt. Even kijken wat er nog meer in zit:

Met MELK meer VROUW (?)

Met deze bewering zou ik zeker niet gelukkig zijn, dat roept weer andere associaties op, waarmee maar weer eens is aangegeven hoe ingewikkeld de taal is.

Met KENNIS meer MENS (?)

Dit is een ware bewering; soms wordt wel eens gezegd dat het veel gemakkelijker is om maar niet te veel te weten.

Met KENNIS meer VROUW (?)

Ik vind dit een ware bewering, ik merk om me heen wel eens dat dit niet voor iedereen geldt. Wat zien zij liever? Wanneer ben je meer vrouw?

Met LIPSTICK meer VROUW (?)

Voor mij een onware bewering. Een nieuwe bewering:

Met WISKUNDE meer ZELFVERTROUWEN (?)

De status van het vak wiskunde, de mythe die er omheen hangt, maakt deze bewering tot een ware. Wanneer je tot de wiskundewereld bent doorgedrongen, dan kun je wel wat. Ondanks het mannelijk beeld van wiskunde durf ik nu wel met de volgende bewering in zee:

Met WISKUNDE meer VROUW (?)

Ik zal kort aangeven waarom dit volgens mij een ware bewering is. Kort, omdat over het definiëren van de begrippen 'wiskunde' en 'vrouw' artikelen vol geschreven kunnen worden, maar dat zou toch te veel afleiden van het onderwerp waar het hier om gaat.

'Wat is wiskunde?' Marijke Melis, een vrouw uit de werkgroep 'Vrouwen en Wiskunde' (2) zei: 'Wiskunde is geen einddoel, maar een weg ergens naar toe. De weg te vinden is een kunst, vereist kreativiteit, de weg bewandelen is een kunde'. Om een definitie van 'vrouw' – behalve de biologische – te geven zou interessant zijn maar kan wel eens onthutsende diskussies te weeg brengen. De zuivere, logische, heldere, systematische manier van denken, waarin wiskundigen zo getraind zijn, is niet toereikend om tot de definitie van 'vrouw' te komen. Ik bedoel met 'vrouw' dan ook eerder 'mens'. Ik wil het potentiële dat er in de vrouw zit zoveel mogelijk ruimte en stimulans geven om te ontplooien: intuïtie, kreativiteit, gevoeligheid, leiding geven, doelgerichtheid, organisatievermogen. Met die vollediger ontplooiing kan een vrouw, een mens, in geestelijk en materieel opzicht onafhankelijk worden, zichzelf zijn.
Mijn bewering is dat wiskunde daartoe een belangrijke bijdrage kan leveren. Door wiskunde te bedrijven ontwikkel je vaardigheden als probleem-oplossen, analyseren, ordenen, gebruiken en lezen van grafieken en tabellen, hoofd- en bijzaken scheiden, enz. Wiskundigen, die al jaren de waarden van de wiskunde weten, zullen de titel van dit artikel met mij als een ware bewering moeten onderkennen.
Wiskunde – de kunst – vereist kreativiteit en is de kunde om de weg te bewandelen. Dit zijn eigenschappen, die in ieder mens aanwezig zijn of geleerd kunnen worden. Hoe kan het dan dat de cijfers in Nederland zo ongunstig liggen voor meisjes bij de wiskunde? Meisjes ondervinden blijkbaar nogal veel weerstanden om de weg te bewandelen. Eerst maar eens naar de cijfers voor Nederland kijken.

Percentage geslaagden met wiskunde in het pakket in '79	jongens	meisjes
MAVO 3	36	10
MAVO 4	66	30
HAVO	60	30
Wiskunde-één	78	52
Wiskunde-twee	23	4

Over het L.B.O.-c zijn geen uitgesplitste gegevens bekend.

Deze cijfers zijn ongunstig, zeker wanneer we ze vergelijken met het buitenland, zowel Italië als de Oostbloklanden. In Italië zijn er veel vrouwen in het wiskundeonderwijs. Twee redenen heb ik gehoord:
1 de lage status van het onderwijsberoep
2 wiskunde is een goedkope studie
In Italië betaal je naar de kosten van de studie; medicijnen is een dure studie. Ook in de D.D.R. komen hoger op de hiërarchische ladder minder vrouwen voor bij de leraaropleidingen en op de universiteiten. Er gelden andere invloeden:

> In deze maatschappij hebben mannen de macht en op dit moment is het zo, dat zij bepalen HOEVEEL vrouwen en HOEVER vrouwen op de hiërarchische ladder mogen klimmen.

Wanneer de groep Vrouwen en Wiskunde er voor pleit, dat meer meisjes wiskunde in hun pakket kiezen, heeft dit als reden, naast een wiskundige attitude die noodzakelijk is voor het maatschappelijk funktioneren, dat wiskunde zo vaak gevraagd wordt voor vervolgopleidingen: van verpleegkundige tot natuurkundige heb je wiskunde nodig, voor alle leidinggevende funkties is wiskunde een 'must'. 'Meer vrouwen met wiskunde' kan leiden tot 'meer vrouwen met meer macht', waardoor een evenwichtiger, eerlijker maatschappij kan ontstaan.
Alle reden om na te gaan waarom die cijfers in Nederland zo ongunstig liggen. Waarom presteren meisjes minder dan jongens bij de wiskunde?

II Verschillen

In het onderwijs hebben we te maken met verschillen tussen leerlingen. Verschillen die tot uiting komen in de manier van leren en uiteindelijk in hun prestaties, proefwerken en toetsen. Leerlingen verschillen in de manier, waarop ze informatie opnemen en verwerken, hoe ze met problemen omgaan, of ze een risico durven te nemen, waarom ze leren enz. Ik kwam tot de volgende indeling:

Aangeboren	Persoonsgebonden kenmerken	Motivatie
	• geheugen • tempo • intelligentie	• toekomstbeeld • houding t.o.v. wiskunde
	• manier van informatie opnemen • manier van informatie verwerken • taal/verbaal vermogen • ruimtelijk inzicht • visualiseren	• goede relatie met anderen willen hebben (ook met de docent)
	• analytisch/globaal denken • konvergent/divergent denken	
	• probleem oplossen • faalangst/zelfvertrouwen • (on)zelfstandigheid • risico durven nemen	

Ik heb de kolom **Aangeboren** expres opengelaten om twee redenen:
1 ik wil me niet uitspreken over wat aangeboren is of niet, maar in relatie tot het onderwerp jongens en meisjes in het wiskundeonderwijs, denk ik dat er heel weinig is aangeboren. Onderzoeken spreken elkaar allemaal tegen.
2 ik wil me er ook niet over uitspreken, omdat daarover de diskussie niet moet gaan. Er zijn zoveel andere faktoren, waarover wel iets bekend is en waaraan je direkt in het wiskundeonderwijs wat kunt doen en dàt is interessant op dit moment.

Dat hele gebied van aangeboren eigenschappen– opvoeding en rolsocialisatie zijn hele belangrijke en interessante faktoren, vooral als je vader of moeder bent. In dit artikel wil ik mij echter beperken tot leerlingen in het voortgezet onderwijs met een bepaalde opvoeding, met bepaalde leerlingkenmerken, wel of niet faalangstig, die de wiskundeles volgen, die gegeven wordt door een man of een vrouw.

Om het vervolg van dit artikel goed te kunnen lezen, breng ik *heel uitdrukkelijk* de volgende beperking aan:
Als ik schrijf 'Meisjes of jongens hebben die eigenschap ...', of 'Mannen die doen', of 'Vrouwen die ...', dan zullen u en ik tegelijk denken 'dat er ook meisjes zijn die ...' en 'jongens die ...' en 'ik weet een vrouw, die ...'. Om het probleem scherper te stellen praat ik absoluter dan de werkelijkheid is. Na deze twee inperkingen kom ik terug bij de persoonsgebonden kenmerken en motivatie.

III Persoonsgebonden kenmerken

De kenmerken: manier van informatie opnemen en verwerken, taal/verbaalvermogen, ruimtelijk inzicht en visualiseren neem ik als blok samen, omdat er relatie tussen bestaat.
Van alle onderzoeken (3) naar sexegebonden kenmerken zijn de dimensies ruimtelijk inzicht en verbaal vermogen, de enige waarover de onderzoeken elkaar niet tegenspreken ... Vanaf het achtste jaar worden er duidelijk verschillen gemeten tussen jongens en meisjes: het ruimtelijk inzicht ten gunste van de jongens, het verbale vermogen ten gunste van de meisjes. Aangeboren of rolsocialisatie?
We kijken naar het spel in de jonge jaren; jongens spelen met blokken, spelen met lego waarbij veel bouwtekeningen zitten, laten auto's door de kamer en de gang rijden, voetballen en klimmen in bomen en leren hun omgeving op deze manier ruimtelijk verkennen. Meisjes spelen en praten met poppen, spelen met keukentjes, spelen ook wel eens met lego, vinden het gezellig bij moeder in de keuken en praten daar samen, doen meer plaatsgebonden spelletjes. Hoewel het misschien allemaal wat gechargeerd overkomt, lijkt hier toch de voornaamste reden te liggen van de ontwikkeling van ruimtelijk inzicht en visualiseren bij de jongens en van taalontwikkeling bij de meisjes.
Voor de docent(e) heeft dit als konsekwentie, dat zij/hij zich bewust moet zijn hoe zij/hij de informatie aanbiedt. Van een stukje tekst een plaatje maken om het te verduidelijken zou op meisjes wel eens minder goed kunnen werken dan we denken. Misschien hebben zij wel veel meer behoefte aan uitdieping van de taal. De vaardigheid 'maak eerst een plaatje' moeten zij misschien wel veel nadrukkelijker leren. Net zo als jongens moeten leren te beschrijven wat ze doen, hun gedachten onder woorden leren brengen. Meisjes schrijven veel meer in de les, in hun proef en in hun schrift, dat heeft hun het stempel door veel onderwijskrachten gegeven 'ijveriger maar dommer'.
Wanneer docenten meer kennis zouden hebben van leerstijlen, hun eigen leerstijl zouden weten én de kennis dat personen in gelijke leerstijl elkaar gemakkelijker

aanspreken en verstaan, dan zou er een opening zijn om meisjes meer op hun 'eigenaardige' manier te laten leren.

In onderzoeken wordt geen sexe-verschil gemeten tussen analytisch en globaal denken. Veelal wordt aangenomen dat meisjes meer globaal zouden denken en jongens meer analytisch. Onderzoeken spreken elkaar tegen, er bestaat wel een duidelijke relatie met wat er moet worden geanalyseerd; voor welke taak is men gemotiveerd. (zie verder IV)
Om problemen op te leren lossen moet je durven proberen, fouten durven maken, een andere weg durven inslaan. Meisjes vermijden het liever om fouten te maken, ze willen het graag goed doen.
Rolsocialisatie speelt hier een overheersende faktor.
In de wiskunde zullen meisjes hierdoor minder goed problemen kunnen oplossen als jongens. Faalangst, gebrek aan zelfvertrouwen zijn hier bepalend voor deze prestatie. (zie verder V)
Uit deze gekonstateerde verschillen – ontstaan door opvoeding – zou voor een groot deel de geringere deelname van meisjes in de wiskunde verklaard kunnen worden. Zeker als we daarbij bedenken, dat de wiskundedocent, merendeels mannen, met zijn/haar voorkeur voor een leerstijl de wiskunde onderwijst. Maar leerstijlen liggen niet vast, er zijn relatieve verschuivingen mogelijk. Het hele gebied van motivatie en faalangst lijkt mij de voornaamste oorzaak van de geringere deelname van meisjes.

IV Motivatie

Motivatie is te beschrijven als een cyclisch proces (4) (5), waarin de volgende fasen zijn te onderscheiden:
a het stellen van doelen: het voor ogen hebben van een realistisch doel bevordert het leren.
b het toeschrijven van de prestaties bij mislukking en sukses.
c het verkrijgen van informatie over de geleverde prestaties.
d affektieve waardering. De behaalde resultaten leveren trots, tevredenheid, teleurstelling of schaamte op.
e verwachting. Op grond van de ervaringen uit het verleden ontwikkelen zich bij de leerling in wisselwerking met de omgeving verwachtingen van taken in de toekomst.
Er zijn leerlingen, die in dit cyclisch proces goed draaien, hun prestaties – geleverd door eigen inbreng – werken versterkend op hun zelfbeeld en wekken positieve verwachtingen op voor de volgende taak. Voor anderen werkt de spiraal naar beneden: een slecht resultaat levert 'ik kan het ook niet', teleurstelling, een negatieve verwachting voor de volgende taak, een omgeving die daar op in werkt en een verdere bijstelling van het doel ('ik heb het ook niet nodig'). Sommige leerlingen zijn eerder geneigd in die spiraal naar beneden terecht te komen dan anderen. Faalangst is daar de belangrijkste oorzaak van.
De verschillende fasen in het cyclische proces ga ik wat verder uitdiepen, toegespitst op meisjes.

a. Het stellen van doelen
Zichzelf realistische doelen stellen werkt positief op het leren. Het wiskunde-onderwijs dient dan wel zo ingericht te zijn dat dit ook mogelijk is. Subdoelen zijn altijd afgeleid van grotere doelen, als:

- beroepskeuze: wat wil ik later worden?
- je aardig ontplooien als meisje als vrouw: vriendelijk blijven, ondergeschikt blijven aan jongens. Intelligent zijn mag, maar wis- en natuurkunde op jouw eigen-wijze leren zet je apart in de klas, verlaagt je kansen dat ze je gewoon aardig vinden. Het mannelijk beeld van wiskunde is hier mede een oorzaak van.

b Het toeschrijven van de prestaties bij mislukking en sukses (6)
In de attributietheorie – een jonge tak van de sociaal-psychologische wetenschap – wordt het belang van het toeschrijven van de prestaties aan in- en externe oorzaken uitgezocht. Zij onderkent, dat prestaties ten zeerste zijn gekoppeld aan de overtuiging, die de persoon heeft over de oorzaken van sukses en mislukking. Dit levert de volgende matrix op, waarin ik in de verschillende cellen opmerkingen heb geplaatst.

	Sukses	Mislukking
interne	– ik heb er ook hard voor gewerkt – ik kan goed leren	– ik kan het niet – ik hoef het niet – ik vind het ook niet leuk
externe	– het was een gemakkelijk proefwerk – ik had 'toevallig' die som gisteravond gemaakt	– het was een slecht proefwerk – idiote normering – die leraar kan niet uitleggen

Voor ieder zal het herkenbaar zijn als ik deze matrix overdek met mannen- en vrouwentekens.

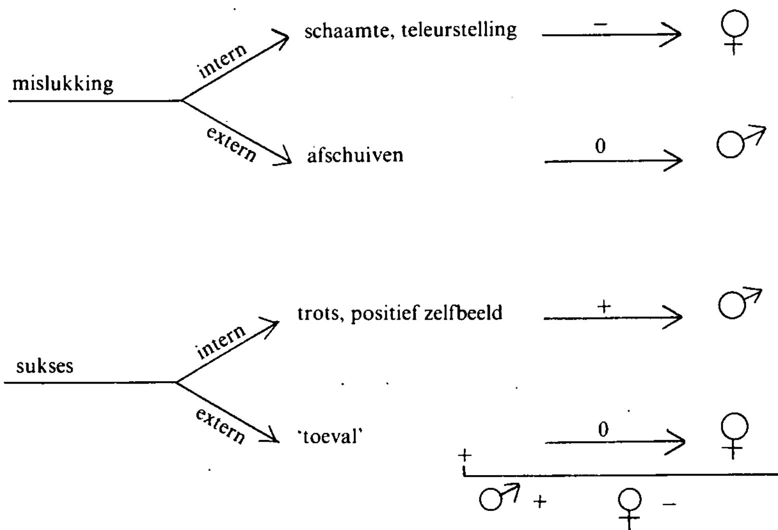
	Sukses	Mislukking
interne	– ik heb er ook hard voor gewerkt – ik kan goed leren	– ik kan het niet – ik hoef het niet – ik vind het ook niet leuk
externe	– het was een gemakkelijk proefwerk – ik had 'toevallig' die som gisteravond gemaakt	– het was een slecht proefwerk – idiote normering – die leraar kan niet uitleggen

Erkennen dat een geleverde, suksesvolle prestatie door de faktor inspanning tot stand is gekomen, is voor meisjes/vrouwen moeilijk te onderkennen. De rolsocialisatie o.a. bescheidenheid en afhankelijkheid van externe faktoren geeft mij deze indeling. De mogelijkheid hierin verandering aan te brengen, brengt mij tot het volgende punt.

c Het verkrijgen van informatie over de geleverde prestaties
We zullen het onderwijs zó moeten inrichten, dat leerlingen werkelijk zicht krijgen op hun prestaties: eerlijke feedback, naar leerlingen luisteren, leertaken waarmee je met inspanning ook eerlijke resultaten kunt behalen, diagnostisch werken en dan ook aangeven wat nog bijgeleerd moet worden. Deze manier van werken zal aan iedere leerling – meisje of jongen – zicht geven op haar of zijn eigen bijdrage in de prestatie. Dit vraagt veel van de docent(e), maar leerlingen kunnen zich hierdoor zo volledig mogelijk ontplooien als wiskundige, maar vooral als mens.

d Affektieve waardering
Mislukkingen tegenkomen en de oorzaken bij jezelf zoeken, levert schaamte en teleurstelling en werkt negatief door in het vervolg. Mislukkingen tegenkomen en daar externe oorzaken voor aanwijzen, is het probleem van je afschuiven en heeft nauwelijks invloed op het vervolg.
Sukses aan interne oorzaken danken verstevigt het zelfbeeld; sukses aan externe oorzaken toewijzen doet dat nauwelijks.

Schematisch:



e Verwachtingen
Verwachtingen ontwikkelen zich op grond van eigen ervaring in wisselwerking met de omgeving:
- eigen ervaringen. Uit het voorgaande verhaal zult u begrepen hebben dat deze in veel gevallen niet zo goed zijn.
- de omgeving: ouders
  vriendinnen, vrienden
  vriendjes
  leraressen en leraren
  de maatschappij

Ik laat deze faktoren maar even zitten, er is zoveel over te zeggen. Ik ga terug naar de neerwaartse spiraal waar faalangst een grote oorzaak is om in de neerwaarste richting terecht te komen.

V Faalangst (7)

Faalangstige leerlingen – waartoe ik globaal de meisjes in het wiskundeonderwijs reken – tonen de volgende kenmerken:
- behoefte aan overzicht/struktuur
- behoefte aan kennis van eigen prestatie
- behoefte aan warme, persoonlijke relaties.
- behoefte aan personen die als voorbeeld fungeren
- behoefte aan positieve verwachtingen

We kennen allemaal de meisjes in de klas, die alles overnemen van het bord, die navragen of het nu zo klopt, die heel nauwkeurig met het antwoordenboek werken, die een prachtig schrift hebben, die een 'proef-proef' willen hebben enz. Dat levert bij veel onderwijskrachten het idee (8) dat meisjes dommer, maar ijveriger zijn. Docenten zullen met faalangstige kinderen moeten leren omgaan, hun behoeften leren onderkennen. Bij de laatste drie kenmerken van faalangstige leerlingen wil ik nog even blijven stilstaan en daarmee laten zien, dat een lerares positief werkt op de deelname van meisjes in het wiskundeonderwijs.
Een persoon die als voorbeeld fungeert, die in levende lijve het bewijs is dat meisjes wiskunde kunnen leren en die door er te zijn en in omgang met meisjes in- en expliciet 'echte' positieve verwachtingen (dus niet met dubbele bodem) uitspreekt, is stimulerend voor meisjes. Misschien speelt ook nog een rol dat vrouwen gemakkelijker de leerstijl herkennen als die van meisjes en misschien voor dezelfde leerstijl voorkeur hebben. Dat een warme, persoonlijke relatie zowel mannen als vrouwen kunnen opbouwen, geloof ik en weet ik, hoewel vrouwen daar in het algemeen beter in zijn.
Een konklusie voor het wiskundeonderwijs is dat er meer vrouwen de scholen binnengehaald moeten worden. En dan niet één vrouw in een wiskundesektie van acht mannen, maar er naar streven dat er een gelijke verdeling ontstaat.

VI Aanbevelingen

Impliciet heb ik een aantal aanbevelingen gedaan voor het wiskundeonderwijs:
- docenten gevoeliger maken voor het leren van meisjes
- kennis van diverse leerstijlen en van hun eigen leerstijl
- aanbieden van leerstof in plaatjes en in taal
- leren doorbreken van de motivatiecyclus naar beneden
- herkennen van faalangstige leerlingen
- bevorderen van meer vrouwen in het wiskundeonderwijs
- het serieus nemen van de werkgroep 'Vrouwen en Wiskunde'.

Ik heb nog ontzettend veel laten liggen, om enkele punten te noemen:
- leerboeken, doorspekt van voorbeelden die meisjes niet aanspreken
- de didaktiek, de werkvormen
- het mannelijk beeld van wiskunde
- het moment van de vakkenpakketkeuze, dat samenvalt met de periode, dat meisjes zich meer met de vrouwenrol gaan identificeren
- het leerplan, de algebraïsche vaardigheden in klas 1 en 2
- komputerkunde en de angst van meisjes voor apparaten
- de HEWET, met het risico dat wisk-a door de meisjes en wisk-b door de jongens wordt gekozen
- opvoeding/basisonderwijs
- aparte meisjesgroepen. Voor de Mammoetwet – toen er nog specifieke meisjesscholen waren – werd er veel vaker de b-richting gekozen door meisjes dan tegenwoordig.
- enz., enz.

Om meer grip op de gehele problematiek te krijgen zal er nog veel samen gepraat moeten worden en kennis opnieuw doorgelicht. Er zullen studiedagen georganiseerd, nascholingscursussen gegeven, artikelen geschreven en lezingen gehouden moeten worden.
De groep Vrouwen en Wiskunde werkt daar hard aan. Uit deze groep heb ik voor een belangrijk deel de inspiratie gehaald voor dit artikel.

(1) *Passen & Meten*, deel 4-deel 6, Groningen 1975.
(2) De groep Vrouwen en Wiskunde is in nov. '81 opgericht na een oproep van Marja Meeder en Jophien van Vaalen in de verschillende vakbladen.
(3) Fennema, *Influence of selected cognitive, affective and educational variables on sex-related differences in mathematics learning and studying*. In L. H. Fox, E. Fennema, J. Sherman 1977.
(4) *Rekening houden met individuele verschillen*, Francis Meester, George Schoemaker en Jaap Vedder, Utrecht 1980.
(5) Het blad 'School' 1979, 7e jrg nr 1.
(6) Memo 2o M. Geensen dec. 1978 Utrecht.
(7) H. J. H. Hermans e.a. *Van faalangst tot verantwoordelijkheid*, Amsterdam 1975.
(8) *Docenten over onderwijs aan meisjes: 'positieve discriminatie met een dubbele bodem'*, Paul Jungbluth, Nijmegen 1982.

Een didactische moeilijkheid

P. G. J. VREDENDUIN

In het voortreffelijke boekje *Rekening houden met individuele verschillen* lees ik op blz. 107:
'We bekijken de functie $f: x \rightarrow 3x + 2$ van $\mathbb{Z}$ naar $\mathbb{Z}$.
a Bereken de waarde van $f(2) - f(1)$, de waarde van $f(11) - f(10)$ en die van $f(-3) - f(-4)$. Wat merk je op?
b $p \in \mathbb{Z}$. Druk $f(p)$ en $f(p + 1)$ in p uit. Hoeveel is de waarde van $f(p + 1) - f(p)$?'
Inderdaad een didactisch heet hangijzer. Waarom is dit zo moeilijk?

Gegeven is dat
$\forall x \in \mathbb{Z} : f(x) = 3x + 2$
We doen nu de stap van
$f(x) = 3x + 2$ naar $f(p) = 3p + 2$
Dat is pas op de plaats maken. We stellen de variabele door een andere letter voor. Dat mag uiteraard, maar aan de bewering wordt daardoor niets veranderd.
Nu volgt
$f(p + 1) = 3(p + 1) + 2$
Voor p substitueren we $p + 1$. Dat is helemaal geen pas op de plaats, maar voor de leerling eerder een sprong in het duister. Hoe vangen we dit op?

Ik herinner me nog hoe ik me er vroeger uit redde, voor 1968, dus in de tijd dat we ons nog minder nauwkeurig rekenschap gaven van de achtergronden van ons taal- en symboolgebruik. Met ietwat beschaamde kaken wil ik het opbiechten. De accenten dienen om de nadruk weer te geven die ik met mijn stem produceerde.
$f(\dot{x}) = 3\dot{x} + 2$
$f(\dot{4}) = 3 \cdot \dot{4} + 2$
$f(\dot{p}) = 3\dot{p} + 2$
$f(p+\grave{1}) = 3(p+\grave{1}) + 2$
(f, even wachten, $p + 1$ snel achter elkaar met nadruk op de 1)
En als het nog niet lukte, dan maar van voren af aan beginnen. Dan had ik het ritme er wel ingehamerd en deden mijn leerlingen het voortaan, zoals ik het gesuggereerd had. Een prachtig staaltje van autoritaire didactiek. Ik had daarmee niet alleen mijn onvermogen gecamoufleerd, maar ook het feit dat ik de essentie van de situatie niet goed door had.
In de geciteerde tekst, afkomstig uit Moderne Wiskunde 4HV, wordt gevraagd:

'Druk $f(p)$ en $f(p+1)$ in p uit.' De auteurs (van MW) hopen door deze vraagstelling de leerlingen tot substitutie te bewegen. Op het eerste gezicht een didactisch aardige vondst. Toch heb ik bezwaren.
Om te beginnen is de opdracht 'druk uit in' ietwat vaag. Ik dacht dat we door de modernisering van 1968 de mogelijkheid hadden gekregen dergelijke vage terminologieën te vermijden. Ik wil hier niet proberen nader te analyseren wat ermee bedoeld wordt en hoe je het niet-vaag zou kunnen formuleren. De auteurs bedoelen zonder twijfel dat het antwoord op de opdracht
druk $f(p)$ in p uit
is
$f(p) = 3p + 2$
Hier doet zich weer dezelfde wonderlijke situatie voor als daarnet. De functie f is gedefinieerd door
$f(x) = 3x + 2$ voor alle $x \in \mathbb{Z}$.
Niemand zal het in zijn hoofd halen hier te zeggen, dat je $f(x)$ in x uitgedrukt hebt. Je kan $f(x)$ niet in x uitdrukken, als je f nog niet gedefinieerd hebt. En als je f gedefinieerd hebt, dan staat het er al.
De overgang op $f(p) = 3p + 2$ houdt alleen in het voorstellen van de variabele door een andere letter. Onduidelijk is, waarom je nu plots wel zegt, dat je $f(p)$ in p hebt uitgedrukt. En nu komt weer de sprong in het duister: voor p wordt gesubstitueerd $p + 1$.
Ik geef toe, dat ik de methode van de auteurs (van MW) veel eleganter vind dan de mijne. De mijne had iets van bruut geweld. Een wezenlijk verschil is er echter niet. Ook de auteurs gaan (m.i.) suggestief te werk en bedrijven daarmee autoritaire didactiek.

Ik durf niet te beweren dat ik weet hoe het wel moet. Ik wil wel een poging wagen het iets anders aan te pakken.
Gegeven is de functie
$f: x \to 3x + 2$ van $\mathbb{Z}$ naar $\mathbb{Z}$.
Kies een geheel getal, bijv. 4. Welke functiewaarde hoort hierbij?
$3 \cdot 4 + 2$
Dus
$f(4) = 3 \cdot 4 + 2$
Kies weer een of ander geheel getal, het kan me niet schelen welk. Noem het maar p. Welke functiewaarde hoort hierbij?
$3p + 2$
Dus
$f(p) = 3p + 2$
Ook $p + 1$ is nu een geheel getal. Welke functiewaarde hoort hierbij?
$3(p + 1) + 2$
Dus
$f(p + 1) = 3(p + 1) + 2$
Ogenschijnlijk is er niet veel veranderd. Het essentiële is echter dat hier duidelijk naar voren komt dat
a in '$f: x \to 3x + 2$ van $\mathbb{Z}$ naar $\mathbb{Z}$'
(of $\forall x \in \mathbb{Z}: f(x) = 3x + 2$)
de variabele x een gebonden variabele is;

b in 'bij p hoort de functiewaarde $3p + 2$'
(of $f(p) = 3p + 2$)
de variabele p een vrije variabele is.

In de begeleidende taal ziet men de overgang van de gebonden op de vrije variabele door het overgaan van 'voor alle geldt' op 'kies een of ander'.[1])
Deze overgang van de gebonden op de vrije variabele is voor de leerling moeilijk. Als het echter de leraar helder voor ogen staat (en ik moet toegeven dat het bij mij lang geduurd heeft eer ik het precies door had), dan zal het voor hem makkelijker zijn een goede didactiek te vinden.

Ik wil aan dit verhaal een conclusie verbinden die voor mij zeer belangrijk is geweest.
Didactiek betreft het zoeken naar een geschikte weg om kennis over te dragen.
Wil men kennis overdragen, dan is het op zijn minst gewenst dat men een helder inzicht heeft in het probleem dat men wil behandelen.
Het goed op de hoogte zijn van de wetenschappelijke achtergronden maakt het de docent gemakkelijker een goede didactiek te vinden.
Vandaar dat een leraar er verstandig aan doet zich in deze achtergronden te verdiepen en zich er tijdens zijn lesgeven van bewust te zijn.
Bij mijn werk aan de THD is mij deze noodzaak overduidelijk geworden.

[1]) Ik heb het probleem van het overgaan van gebonden op vrije variabelen uitvoeriger besproken in: Gebruik en misbruik van variabelen, Euclides **54**, no. 2, blz. 41-55.

Korrel

Leerdoelgerichte toetsen van het CITO

Na lezing van het artikel van H. Boertien 'Leerdoelgericht werken in het onderwijs' (Euclides, jrg. 57, no 7) heb ik gehuild. Jarenlang al probeer ik begrip op te brengen voor de moeilijke taak van het CITO. Zelfs wil ik voor bepaalde onderdelen, zoals de algemene kennistoets basisonderwijs, mijn waardering uiten.
Er zijn echter vele aspecten aan het CITO-werk, zoals o.m.
- het 'objectiverende karakter van de toetsen',
- de 'meerkeuzevraag' en
- de 'meettechnieken', welke elke keer weer mijn ergernis opwekken.

In gesprekken met CITO-medewerkers lijkt men altijd alle begrip te hebben voor kritiek. Toch blijft men – terug in de sommenbunker – volharden in dezelfde boekhoudersmentaliteit.
Wat nu weer?
Het CITO tracht een nieuwe markt te creëren; die van de 'leerdoelgerichte toetsen'. Hak de leerstof in zo klein mogelijke stukjes en overhoor de leerlingen steeds maar weer schriftelijk om te kijken of ze die partjes beheersen. Op die manier wordt het gehele onderwijs vertoetst; er wordt geen onderwijs meer gegeven, laat staan genoten. Dag in dag uit wordt de leerling – als een patiënt in een academisch ziekenhuis – onderzocht.

Het treurigste (zie artikel Boertien) is echter, dat het CITO nooit eens lijkt na te denken of datgene wat men toetst wel enige vernieuwende betekenis heeft.
Er wordt uitgegaan van de vigerende leerstof, zoals die voorkomt in de meest gebruikte leerboeken. Deze leerboeken zijn alle weer geënt op de bestaande examens. Leraren ontwerpen de toetsvragen naar aanleiding van die boeken. De leerboekschrijvers zullen goed op de toetsen letten. En zo blijven we maar in hetzelfde kringetje ronddraaien. Zo kunnen we met de trits 'verzamelingen', 'gehele getallen' ..... etc. nog wel tot het jaar 2000 voort.
Zou het niet eens een gedachte (niet nieuw!) zijn als het CITO zou proberen ideeën te leveren aan docenten, waarmee deze zelf de prestaties van de leerlingen en die van zichzelf kunnen evalueren?
Dan zal één van mijn oud-collega's niet elk jaar weer hoeven uitroepen:
'CITO! Wat hebben jullie ons nu weer voor toets gebakken!'

Ed de Moor

P.S.
Eén van mijn collega's vatte zijn visie op deze kwestie met een vierkeuzevraag samen:
Wat maakt het CITO?
a. toetsgerichte leerdoelen
b. leergerichte toetsdoelen
c. leerdoelgerichte toetsen
d. doelgerichte leertoetsen.

Naschrift:

Reactie op de 'korrel' van De Moor.

Het CITO heeft als belangrijkste doelstelling te bevorderen dat de toetsing van leerstof op een zo objektief mogelijke wijze kan plaatsvinden om de leerlingen te beschermen tegen een (meestal onbedoelde) subjektieve waardering voor geleverde leerprestaties. Als deze hoofddoelstelling bij iemand in feite alleen maar ergernis opwekt en hij desondanks jarenlang steeds maar weer bezig is begrip voor het CITO op te brengen, ja dan ziet men de tragiek en het zich voltrekken van een drama, zodra dit instituut produkten uitbrengt, duidelijk voor zich. Maar nu ter zake.

Bij het ontwikkelen van toetsen moet men verschillende keuzes maken. Eén van deze keuzes betreft de omvang van de te toetsen doelstellingen. Men zal daarbij kiezen uit één van de vier alternatieven van het volgende item.

Toetsing van concrete, niet al te omvangrijke leerdoelen in het onderwijs.

A is nodig en voldoende
B is nodig maar niet voldoende
C is niet nodig maar wel voldoende
D is niet nodig en niet voldoende

Op het CITO is gekozen voor alternatief B omdat de leraar in de klas zich eveneens steeds weer bezig houdt met die niet te omvangrijke leerdoelen. Aan het eind van een les of van enkele lessen wil de leraar wel eens weten of de leerlingen zich de betreffende kennis of vaardigheid hebben eigen gemaakt. Daarom heeft het project Leerdoelgerichte Toetsen de opdracht gekregen voor de onderbouw van het AVO/VWO toetsen bij concrete niet al te omvangrijke leerstofeenheden te ontwikkelen. Natuurlijk is het *niet* de bedoeling dat een docent *uitsluitend* beperkte leerdoelen nastreeft en hij zal op langer termijn complexe(re) doelen voor ogen hebben. Ook daarvoor heeft het CITO aandacht. Dit blijkt uit het vervolgartikel 'Leerdoelgerichte toetsen bij langetermijndoelen' (Euclides, jaargang 57, no. 8). Er is echter gekozen voor het niet op grote schaal beginnen met de constructie van toetsen bij zeer complexe leerdoelen zolang men bij de meer eenvoudige leerdoelen nog geen toetsen ontwikkeld heeft.

Een andere keuze die men op het CITO gemaakt heeft is dat men toetsen wil produceren die door zoveel mogelijk docenten te gebruiken zijn. Dit houdt in dat bij de toetsconstructie hoofdzakelijk wordt uitgegaan van de meest frequent gebruikte leerboeken. Als men zich namelijk hierbij teveel baseert op zogeheten vernieuwingsprojekten is het uiterst onzeker of de te produceren toetsen ooit gebruikt zullen worden. Het aantal mislukte of minder geslaagde vernieuwingsprojekten van de afgelopen jaren spreekt daarbij voor zich. Overigens zou het zich volledig richten op onderwijsexperimenten ertoe leiden dat de overgrote

meerderheid van docenten geen enkele ondersteuning op het gebied van toetsing zou krijgen.
Dat men op het CITO wel oog heeft voor vernieuwingstendensen blijkt uit het reeds genoemde artikel over lange-termijndoelen in Euclides, jaargang 57, no. 8. Momenteel worden in Nederland enige projekten opgezet die kunnen leiden tot vernieuwingen in het onderwijs en waarvan de basisideeën nauwe verwantschap vertonen met de ideeën die in dit artikel besproken worden. In dit verband kan het projekt 'Heuristisch wiskunde-onderwijs' van het Mathematisch Instituut te Groningen genoemd worden.

Tenslotte wordt (al langer!) binnen het CITO overwogen om een handzaam boekwerkje uit te brengen waarin aandacht besteed wordt aan de voornaamste aspekten van het beoordelen van leerlingen. Daarnaast is men van mening dat het construeren van goede opgaven in meerkeuze- of open vraagvorm evenals het verantwoord samenstellen van toetsen een kunst is die een docent zich niet al te snel eigen kan maken. Het CITO blijft het daarom belangrijk vinden om docenten beproefde opgaven ter beschikking te kunnen stellen. Dan zullen veel leerlingen niet na iedere toets van hun docent hoeven uit te roepen: 'Wat hebt u ons nu weer voor een toets gebakken!'.

Ik hoop met de bovenstaande uitleg de heer De Moor enigszins gerustgesteld te hebben zodat hij ook in de komende jaren nog enig begrip voor het CITO op zal kunnen brengen.

H. Boertien

Zijn er tendensen in het wiskunde-onderwijs in Vlaanderen? En in Nederland?

Verslag van een dag die door mij achteraf beschouwd wordt als een dag van gemiste kansen.

HARRIE BROEKMAN

Met de bovenstaande vraag kwam ik naar de 7de studiedag van de NVvWL en de VVWL op zaterdag 20 maart j.l. in Den Bosch.
Dat ik een voor mij erg bevredigend antwoord kreeg kan ik niet zeggen; ook al deden René Laumen, Chris de Munter en Jan de Lange erg hun best om *hun* verhaal te vertellen aan het zeer kleine gezelschap.
Kort gezegd kwam het relaas van *René Laumen* (inspecteur voor het Rijksonderwijs in Vlaanderen) er op neer dat sinds 1970 het vernieuwd secundair onderwijs (officiële benaming: onderwijstype 1) ingang gevonden heeft, het aantal uren wiskunde in zowel 1ste cyclus, als 2de en 3de cyclus (telkens 2 jaar) zich gestabiliseerd heeft. Voor ons Nederlanders is daarbij opvallend het extra wekelijkse lesuur in het eerste leerjaar waar met de halve groep gewerkt wordt, het feit dat in het 3de leerjaar de meerderheid van de leerlingen nog 4 uur wiskunde doet (de minderheid 2 uur) en in de laatste 2 jaar (3de cyclus) het aantal uren wiskunde – afhankelijk van de afdeling – varieert van 0 tot 8. De wens om de sterk gescheiden vakonderdelen meer tot een eenheid te brengen heeft geleid tot een vrij axiomatische opbouw via verzamelingen, relaties, structuren, etc. De 'verering' voor de driehoeksmeting ging over op een verering voor de algebraïsche benadering.
Uiteraard volgt daar nu weer een reaktie op middels een wat intuïtievere aanpak bij bijvoorbeeld de getalverzamelingen en een meer tot z'n recht laten komen van het meetkundige aspect.
In hoeverre dit laatste een wens is van René Laumen of realiteit in de school werd mij niet duidelijk. Eveneens bleef onduidelijk welke tendensen te onderkennen zijn in de leerboeken en de manier van werken in de klas.

Ook *Chris de Munter*, die voor het Vrij Onderwijs (bij ons bijzonder onderwijs geheten) sprak, kwam aan dit laatste niet toe. Wel benadrukte hij dat bij dit Vrij Onderwijs gepoogd is en wordt om de doelstellingen van het wiskunde onderwijs meer te expliciteren en te voorzien van methodologische toelichtingen. Maar wat dat daadwerkelijk inhoudt werd nauwelijks duidelijk. Het gevolg is dat ik blijf zitten met de indruk dat er in het eerste jaar wat meer omschrijvingen zijn van activiteiten (zoals construeren, berekenen, etc.), maar dat in het 2de jaar de stap gezet wordt naar abstracter werken, axiomatisering etc.[1]) Duidelijk werd in ieder geval dat Chris de Munter voorstander is van axiomatiserend onderwijs. Maar is

dat de tendens in het hele Vrije Onderwijs? Ik zal het U niet kunnen zeggen. Zijn er dan geen tendensen aan te wijzen in het wiskunde onderwijs in Vlaanderen? Of zijn ze van een andersoortige aard? Gaat het op dit moment misschien niet zozeer om veranderingen in urenaantallen en leerstof, maar meer om veranderingen van methodiek, van manieren van werken, van het gebruiken van meer intuïtieve inleidingen etc.? Willen we van elkaar leren dan zouden we juist daarover eens iets moeten horen.

Jan de Lange, die voor Hewet sprak, gaf aan dat het moeilijk – zo niet onmogelijk is – om over een tendens in Nederland te spreken. Tenzij je zou willen noemen het feit dat op steeds meer scholen geprobeerd wordt zelf materiaal te maken bij en rondom bestaande leerboeken en dat daarnaast vaker gekozen wordt voor een 'recht toe, recht aan' boek.
In hoeverre dit gaat strijden met de georganiseerde veranderingen die door de Hewet opgezet worden voor de laatste twee jaren van het VWO kwam niet aan bod. Ook niet of de IOWO-lijn door de SLO voortgezet gaat worden. Eventueel kunnen we hierbij ook denken aan Moderne Wiskunde, 4de druk, en andere nieuwe schoolboeken.
Wel werd duidelijk dat er met groot enthousiasme gewerkt wordt aan nieuwe leerstofinhouden voor Wiskunde A waarbij het kunnen mathematiseren een essentiële rol vervult. Dit laatste werd enthousiast toegelicht met diverse voorbeelden uit 'Lessen in ruimtemeetkunde' en 'Matrices'.
Een tendens die Jan de Lange in ieder geval kon aangeven was het toenemend enthousiasme van de leraren in de experimenteerscholen voor het langdurig bezig zijn met het intuïtief onderbouwen van diverse begrippen en het toepassen daarvan, meer dan het exploreren van abstracte wiskunde. Tevens noemde hij de behoefte om ook in lagere leerjaren met soortgelijk materiaal te werken.[2])
Maar of we daarmee kunnen spreken over tendensen in het Nederlandse wiskunde onderwijs? Bij het beluisteren van het Hewet verhaal bekroop me wel het gevoel dat we in Nederland toch weer bezig lijken te zijn met een vernieuwing van bovenaf (in de zin van 'eerst VWO' en dan . . .). Of laten de anderen zich zo slecht horen?

Noten

1) Het is m.i. van belang om te zien hoe daarbij de stap gezet wordt van het veelvuldig gebruiken van actie-taal naar het meer gebruiken van feitvaststellende-taal.
2) Is het vragen naar en het gebruiken van instapproblemen, startvragen en toepassingen een uiting van deze behoefte? Of is dit een uiting van de wil om vanuit de veiligheid van het huidige programma wat 'leuke' dingen te doen?

Korrel

Nogmaals: een omstreden eindexamenopgave

Wiskundigen geven aan kinderen raadseltjes op (in de hoop dat kinderen daarmee wiskunde kunnen leren); zulke bijvoorbeeld:

a) *Ik heb een positief geheel getal in gedachten; ik vertel je niet welk; ik wil je wel verklappen dat 625 zijn vierde macht is. Kun jij nu dat getal noemen?*

b) *Ik heb een natuurlijk getal in gedachten; ik zeg je niet welk; laten we het 'a' noemen; ik verklap je het volgende:*
$50\,000 < 3^a < 5\,000\,000$. Weet jij nu iets van a te vertellen?

c) *Bij elk twee-rijtje (a, b) van reëele getallen is een functie $f_{a,b}$ van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ gedefinieerd, zó:*

$$f_{a,b}: x \to \begin{cases} a \cdot x, & \text{als} \quad x \geqslant 0, \\ b \cdot x, & \text{als} \quad x < 0. \end{cases}$$

$f_{p,q}$ is een van die functies; ik vertel je van $f_{p,q}$ dat hij differentieerbaar is in 0. Weet jij iets te vertellen over (p, q)?

Wiskundigen willen dan graag dat leerlingen ongeveer zó antwoorden:

a) *Dat getal is 5.*

b) *Dat getal is een van de getallen: 10, 11, 12, 13, 14; elk van die getallen zou het kunnen zijn; zonder nadere gegevens kan ik er niet meer van vertellen.*

c) *Ja, nl. $p = q$. Voor èlk reëel getal r geldt: $f_{r,r}$ is in 0 differentieerbaar. Zonder nadere gegevens kan ik over die (p, q) niks méér vertellen.*

Wiskundigen zijn over leerlingen die zulke antwoorden geven, heel tevreden: die leerlingen hebben hun gezond verstand gebruikt om het antwoord te vinden en zij hebben met gezond verstand hun antwoorden geformuleerd. Die leerlingen vinden antwoorden zoals:

op a): '*ja!*',

op b): '*a is een van de getallen 2, 3, 4, ..., 98, 99, 100*',

op c): '$p + q = q + p$',

maar flauwe grapjes en begrijpen dat verstandige mensen voor zulke antwoorden niet veel meer dan een welwillende glimlach over hebben.

Wiskundigen stellen hun vragen ook wel met andere woorden;

i.p.v. *weet je iets te vertellen over (p, q)?*

bijv. *welk verband bestaat er – volgens jou – tussen p en q?*

of *welke relatie bestaat er tussen p en q?*

Wiskundigen hebben de taal waarin zij hun wiskunde formuleren, méér gestyleerd, méér geformaliseerd dan de gewone omgangstaal is. Ook in de z.g. schoolwiskunde tref je elementen daarvan aan:

a′) *Voor welk positief geheel getal x : $x^4 = 625$?*

b′) $?_{a \in \mathbb{N}} [50\,000 < 3^a < 5\,000\,000]$.

c′) *Voor welk twee-rijtje (p, q) van reëele getallen: $f_{p,q}$ is differentieerbaar in 0?*

En zelfs zó iets:
d) *Voor welke* $(a,b) \in (\mathbb{R}\backslash\{0\}) \times (\mathbb{R}\backslash\{0\})$ *: er is* $k \in \mathbb{R}$ *zó dat* $A_{a,b}$ l_k *op* l_k *afbeeldt?*
Maar a′) betekent niet hetzelfde als a):
a′) is een gestyleerde vorm van de volgende vraag en opdracht:
Is er een positief geheel getal waarvan de vierde macht 625 is? Zo ja, beschrijf dan –op zo duidelijk mogelijke manier– de verzameling van al die positieve gehele getallen.
b′) is een gestyleerde vorm van:
Is er een natuurlijk getal a zó dat $50\,000 < 3^a < 5\,000\,000$*? Zo ja, geef een zo duidelijk mogelijke beschrijving van de verzameling van al die natuurlijke getallen.*
b′) betekent dus niet hetzelfde als b).
Omdat wiskundigen de lege verzameling hebben uitgevonden, kan zelfs het antwoord '*nee*' op zulke vragen als '*Is er een ... zó dat ...?*' gegeven worden in de vorm '*de verzameling van ... is de lege verzameling*'.
(De meeste mensen wagen zich maar niet –me dunkt terecht– aan een nadere bepaling van 'een zo duidelijk mogelijke beschrijving'; gelukkig geven gebruiken of gewoonten in allerlei concrete gevallen een voldoende verklaring daarvan).

In zijn Korrel op pag. 357. e.v. van het mei-nummer van 1982 van dit blad, lijkt Vredenduin te wensen dat examenkandidaten een vraag in de vorm c) vervangen door een vraag in de vorm c′); hij zou graag willen dat i.h.b. kandidaten van 1981 in plaats van de opgave:
Ik deel je mee dat er een twee-rijtje (p,q) *van reële getallen bestaat zó dat* $A_{p,q}$ *voor elke* k $(\in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ l_k *afbeeldt op* l_k*;* (a,b) *is er zo een; wat weet je te vertellen over de reële getallen a en b?*
lezen:
Is er een twee-rijtje (p,q) *van reële getallen zó dat* $A_{p,q}$ *voor elke* k $(\in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ l_k *afbeeldt op* l_k*? (Zo ja, ...)*
en vervolgens die vraag met *nee* beantwoorden.
Vredenduin zegt dat elke mogelijke uitspraak, door welke kandidaat dan ook, als antwoord op de vraag '*welke relatie bestaat er tussen a en b?*' geformuleerd, door correctoren moet worden goedgekeurd; zijn argument daarvoor is:
de kandidaat dient iets anders te lezen dan er staat; en
'$P \Rightarrow Q$' is waar als 'Q' waar is (en 'P' waar of onwaar) resp.
'$P \Rightarrow Q$' is waar als 'P' onwaar (en 'Q' waar of onwaar) is.
Zijn kritiek op deze examenopgave is:
'*Welke relatie bestaat er tussen a en b?*' is een ouderwetse en in het huidige bestel ongebruikelijke formulering.
Ik bewonder de mildheid waarmee Vredenduin dit produkt van de CVO weet te bespreken (dit is geen grapje; ik meen het).
Maar wat moeten we vinden van het volgende?
Ik heb een natuurlijk getal in gedachten; ik zeg je niet welk; ik verklap je dat -3 *zijn vierde macht is.*
Zoiets mag je als leraar toch alleen maar doen als je je leerlingen er geregeld voor waarschuwt dat je je wel eens als een bedrieger gedraagt?

Ik verbaas me over het feit dat Vredenduin niet rept van wat je zou wensen dat (zo niet) *alle* (dan toch *vele*, of ten minste *sommige*) kandidaten zouden hebben opgeschreven; toch zeker zó iets:

*) *Dat is gewoon niet waar! Zo'n ding bestaat helemaal niet. Omdat ik geen flauw idee heb wat ik over niet bestaande dingen zou moeten zeggen, maak ik dit onderdeel maar niet.*

Waar haalt Vredenduin de zekerheid vandaan dat er 'gelukkig geen brokken zijn gemaakt'?

Weet hij zeker dat géén kandidaat met zoiets als *) heeft geworsteld:

'zo'n ding bestaat toch niet? ben ik nou zo stom? begrijp ik er helemaal niks van?'

en ten einde raad maar iets heeft opgeschreven dat lijkt op wat je pleegt op te schrijven in gevallen waarin het gaat over wel bestaande lineaire afbeeldingen (en dat nota bene in de eerste opgave)?

Wordt gebruik van gezond verstand (bij het oplossen van examenopgaven door kandidaten) werkelijk *totaal* vernietigd door het (in sommige gevallen slechte) taalgebruik in schoolboeken inzake *'er is een ...'*, *'voor elke ...'*, *'voor welke ...?'*, een taalgebruik dat dan ook maar wordt toegepast door de CVO?

Me dunkt:

Indien er maar één kandidaat is geweest die geworsteld heeft met vragen zoals zojuist geformuleerd, past de CVO zeker één ding: haar oprecht gemeende excuses aan die kandidaat aan te bieden.

A. J. Th. Maassen

P.S. Nog één vraag:

Is '$A_{a,b}$ *beeldt* l_k *af op zichzelf*' goed Nederlands voor:

'$A_{a,b}$ *beeldt* l_k *af op* l_k'? Of goed Nederlands voor: '$A_{a,b}$ *beeldt* l_k *af op* $A_{a,b}$'?

Rationale hoeken met een rationale cosinus

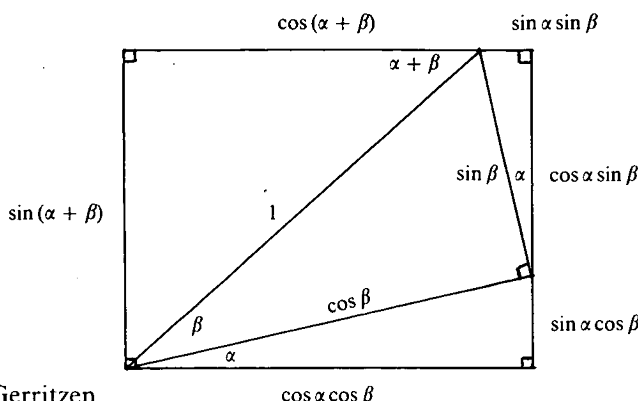
O. BOTTEMA

Een scherpe hoek α zal rationaal heten als $\alpha = \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$, m en n geheel, $m < n$, Hessel Pot[1] heeft onlangs een bewijs gegeven van de stelling: als de rationale hoek α een rationale cosinus heeft dan is $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Voor rationale hoeken in andere kwadranten en voor de sinus en de tangens gelden analoge uitspraken.
Pot gaat uit van $2\cos\varphi = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}$, past op $(2\cos\varphi)^k$, met even waarden van k de binomiumformule toe en komt met een kort betoog tot zijn gevolgtrekking.
De stelling is niet nieuw. Wij kenschetsen hier met enkele woorden enige ons bekende bewijzen. Het oudste daarvan is gegeven door Hadwiger[2]. Het is een bewijs uit het ongerijmde. Is $\cos\varphi$ rationaal dan volgt uit $\cos n\varphi = a_n$ en $\sin n\varphi = b_n \sin\varphi$ dat a_n en b_n rationaal zijn. Na toepassing van de stelling van de Moivre en eveneens de binomiaalformule wordt met een niet zeer eenvoudige redenering het bewijs voltooid.
Een geheel ander betoog vindt men bij Hadwiger en Debrunner[3], die de stelling opnemen in hun kombinatorische geometrie, een moeilijk te begrenzen maar zeer boeiend veld van meetkundig onderzoek. Uitgangspunt is een opmerkelijke, van Scherrer[4] afkomstige stelling over roosterpunten (dat zijn punten die in een vlak rechthoekig assenstelsel gehele coördinaten hebben) en die als volgt luidt: een regelmatige n-hoek waarvan de hoekpunten roosterpunten zijn bestaat alleen als $n = 4$.
Onlangs verscheen van Tzanakis[5] een nieuw bewijs van de stelling. Hier wordt weer uitgegaan van het theorema van de Moivre en de binomiaalformule, waarbij $\cos\alpha = r$, $\sin\alpha = \sqrt{(1 - r^2)}$ wordt gesteld. De afwerking is correct maar vrij moeizaam. In een addendum wordt een verbinding gelegd met de roosterpunten verzameling.
Onze uiteraard beperkte gegevens overziende menen wij te kunnen concluderen dat de methode van Pot, elementair en beknopt, een eenvoudig bewijs geeft van het merkwaardige theorema.

Noten

1 H. Pot, *Gonio als invalshoek*, Euclides 56 (1980-'81), 435-438.
2 H. Hadwiger, *Ueber die rationalen Hauptwinkel der Goniometrie*, Elem. Math. 1 (1946), 98-100.
3 H. Hadwiger en H. Debrunner, *Combinatorial geometry in the plane*, New York etc. (1964), 5, 58-59.
4 W. Scherrer, *Die Lagerung eines regulären Vierecks in ein Gitter*, Elem. Math. 1 (1946), 96-98.
5 N. Tzanakis, *A new proof of a theorem in trigonometry*, ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ, 2 (1979), 554-560.

Korrel



Dick Gerritzen

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Opgaven

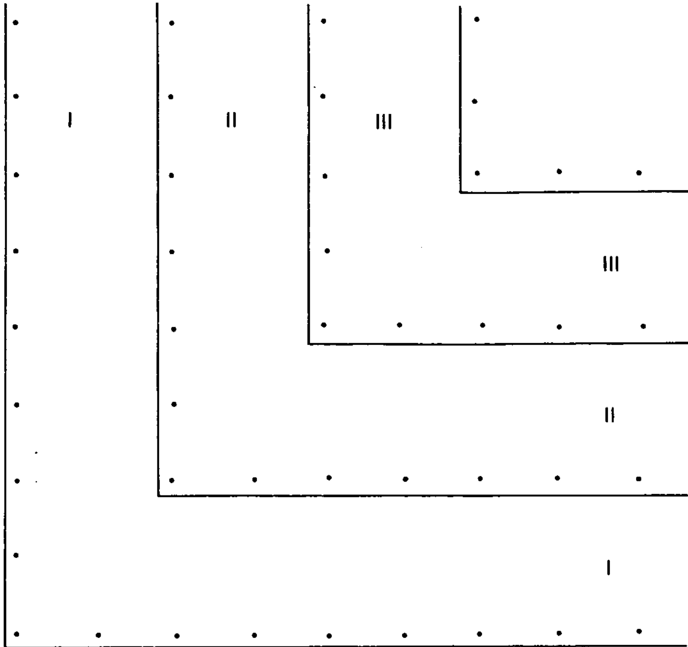
469. De getallen 1 tot en met 100 zijn in willekeurige volgorde op een rij geplaatst. Men wil de natuurlijke volgorde herstellen. Daartoe kiest men twee getallen uit de rij en verwisselt die. Deze bewerking herhaalt men zo vaak, totdat de volgorde 1, 2, 3, ..., 100 bereikt is. Gevraagd het minimaal aantal verwisselingen dat in elk geval toereikend is.

470. In de vorige opgave hebben we getracht de getallen 1 tot en met 100 die door elkaar geraakt waren, in hun natuurlijke volgorde te herstellen.
Nu is er het volgende gebeurd. Een (ouderwetse) zetter heeft kaartjes willen drukken met opschrift voorspoedig negentiendrieentachtig
U kent zonder twijfel reeds de rest van het verhaal. Het zetsel is gevallen en de letters zijn door elkaar geraakt. Ze moeten weer in de goede volgorde geplaatst worden. De zetter neemt daartoe twee letters en verwisselt die. Hoe vaak moet hij minimaal een verwisseling uitvoeren om in elk geval de goede volgorde te kunnen herstellen?

Oplossingen

467. Een koningscentaur kan uitvoeren een koningszet, een paardesprong of een combinatie daarvan. Gezien zijn aard, grondig socialist, alleen naar links, naar beneden of naar links beneden. *A* en *B* doen om beurten een zet met de centaur. *A* begint. Wie hem op (0, 0) plaatst, wint. De centaur staat op (62, 31). Gevraagd een optimale speelstrategie.
Om het raadsel te ontcijferen moet men een luchtig CDA'er zijn, beginnen op het veld (0, 0) en alleen naar rechts en naar boven gaan.
Onder een verliezend veld versta ik een veld met de eigenschap: als de centaur op dat veld staat, verliest degeen die aan zet is. De overige velden heten winnende velden. Een veld is dus winnend, dan en alleen dan als degeen die aan zet is, vanuit dat veld de centaur naar een verliezend veld kan brengen.

In onderstaand diagram zijn de verliezende velden met een stip aangegeven.



Per definitie is (0, 0) verliezend. Direct duidelijk is dat dan ook (2, 0), (4, 0), (6, 0), . . ., (0, 2), (0, 4), (0, 6), . . . verliezend zijn. Vanuit de overige velden van het winkelhaakgebied I kan men de centaur naar een van deze verliezende velden brengen. Die zijn dus winnend.
Het veld van waaruit men gedwongen wordt de centaur naar een winnend veld in I te brengen, is (4, 4). Dit veld is dus verliezend en daarmee ook (4, 6), (4, 8), (4, 10), . . ., (6, 4), (8, 4), (10, 4), . . .
De overige velden van winkelhaak II zijn dan winnend. Dan blijkt (8, 8) weer verliezend enz.
A zet de centaur van (62, 31) naar (60, 28) en wint.

Oplossingen

468. 1221 geeft bij deling door 7 als rest 3
12421 eveneens
124421 eveneens
1244421 eveneens
enz.
Hoe verklaren we dit?
Het verschil van twee opvolgende getallen is
$4 \cdot 10^n + 12(10^{n+1} - 10^n) = 10^n(4 + 12 \cdot 9) = 10^n \cdot 112$
Dit is deelbaar door 7. Daarmee is het raadsel opgelost.
Nu algemeen. *abba* , *abpba* , *abppba* , enz. geven dezelfde rest bij deling door i.
Dit is gelijkwaardig met
$10^n(p + 90a + 9b)$ is deelbaar door i voor $n \geqq 2$.
Als i geen deler 2 of 5 bevat, is dit gelijkwaardig met
$p + 90a + 9b$ is deelbaar door i.
Eerst voor $i > 10$ is het mogelijk, dat we geen oplossing voor p vinden. Bijv. als $i = 11$ en $90a + 9b = 1 (\text{mod } 11)$.
Zo vindt men voor $a = 1$ en $b = 6$, dat $p = 10$, hetgeen onmogelijk is.

Boekbesprekingen

Leerdoelgerichte toetsen Wiskunde, Docentenmap, Cito, Arnhem 1982, 83 blz. + 172 toetsen, ƒ90, –.

Een docent heeft een stuk leerstof behandeld en wil weten in hoeverre de leerlingen zich deze stof eigen gemaakt hebben. Om dit te kunnen nagaan zijn door het Cito een groot aantal m.c.-toetsen ontworpen. De toetsen zijn leerdoelgericht, hetgeen wil zeggen dat de leerstof verdeeld is in met name genoemde concrete leerdoelen, zoals:
de leerling kan vaststellen of twee verzamelingen gelijk of ongelijk zijn en de symbolen '$=$' en '$\neq$' bij verzamelingen gebruiken;
de leerling kan optellen en aftrekken in $\mathbb{Z}$;
de leerling kan ongelijkheden van de eerste graad vervangen door gelijkwaardige ongelijkheden en deze oplossen;
de leerling kan de eigenschappen van een rechthoek, ruit, vierkant, parallellogram en vlieger herkennen en gebruiken;
de leerling kan worteltrekken uit machten (met positieve grondtallen);
de leerling kan met behulp van de stelling van Pythagoras de lengtes van lijnstukken in een balk en in een piramide berekenen.
Zo zijn er 80 toetsen ontworpen, die betrekking hebben op de stof van de klassen 1 en 2 van het voortgezet onderwijs. De toetsen bestaan elk in principe uit 10 items. Bovendien is naast elke toets een tweede ontworpen, die er zoveel mogelijk gelijkwaardig mee is, om te gebruiken indien de uitslag van de eerste 'remedie' wenselijk maakte.
De toetsen zijn in de klas uitgetest en zo nodig daarna herzien. Er is rekening gehouden met de wijze waarop de leerstof in de meest gebruikte leergangen behandeld is. Ideale aansluiting met elke leergang in details is uiteraard niet mogelijk. De leerdoelen zijn echter zo gekozen dat ze samen vrijwel de gehele leerstof omvatten.
Ik heb me zorgvuldig in de toetsen verdiept en vond ze uitstekend van kwaliteit. Ik heb slechts enkele onderwerpen gemist, nl.
in klasse 1: herleiden van $-(a-b)$, $a-(a+b)$, $a-2(-a+b)$;
vereenvoudigen van breuken;
in klasse 2: gebruik van de setbuilder;
intervallen en het voorstellen daarvan op de getallenlijn;
afronden en benaderen.
Toetsen over enkele onderwerpen die betrekking hebben op de stof van klasse 2, t.w. puntverzamelingen in het vlak en oppervlakten (zonder rooster), volgen nog.
Ten slotte zijn nog een zestal toetsen toegevoegd over lange-termijndoelen, ook weer elk in duplo. Deze gaan over:
rangschikken van gegevens (bijv. in grafiek, tabel, diagram) bij het oplossen van een probleem;
gegevens uit diagram, grafiek of figuur gebruiken bij het oplossen van een probleem;
een eenvoudige tekst in wiskundige vorm (bijv. vergelijking) noteren;
gebruik van een definitie, substitueren, bedenken van een tegenvoorbeeld;
controleren of in een redenering een fout zit.
De leraar kan deze toetsen afnemen een half jaar voordat de slotfase van het onderwijs (de keuzepakketten) begint. Hij heeft dan nog tijd voor 'remedie' van zijn onderwijs, indien de uitslag de wenselijkheid hiervan uitwijst.
M.i. is deze serie een mooie aanzet voor iets dat erg belangrijk voor de leraar kan zijn. Hij kan zich beter bewust worden van de doeleinden die hem bij zijn onderwijs voor ogen staan.
Tot slot één punt van constructieve kritiek. Bij het bestuderen van de toetsen is het me herhaaldelijk gebleken dat de kwaliteit ervan zou winnen, indien men zich niet beperkte tot toetsen waarvan precies één antwoord goed is. Beter is ook toetsen toe te laten waarvan meer dan één antwoord goed is. Merkwaardigerwijs schijnt hiertegen geen principieel bezwaar te bestaan; integendeel zelfs. De moeilijkheid is echter dat men geen inzicht erin heeft, hoe de score dan moet worden vastgesteld en gewaardeerd. Zou het heus niet mogelijk zijn daarin inzicht te verkrijgen?

P. G. J. Vredenduin

Paul Lorenzen, Kuno Lorenz, *Dialogische Logik*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1978, VIII + 238 blz., 44.50 DM.

Het boek bestaat uit een zevental artikelen en hoofdstukken uit boeken van de beide auteurs, vier van Paul Lorenzen (samen 60 blz.) en drie van Kuno Lorenz (samen 178 blz.). Ze zijn gecentreerd op één thema: de dialogische logica.
Wat is dat? De dialogische logica is een spel tussen twee personen: P (de proponent) en O (de opponent). P beweert iets, O tracht het aan te vallen. Soms zal P zijn verdediging tot een goed einde brengen, soms gelukt het O de bewering te weerleggen. Bijv. zal P iets beweren van de vorm: $A \to B$. O gaat tot de aanval over en beweert: A. Nu kan P twee dingen doen: hij kan proberen A aan te vallen en hij kan proberen zich te verdedigen door B te beweren. Waarna aan O de taak A te verdedigen resp. B aan te vallen, enz. Ter adstructie een voorbeeld van Kuno Lorenz (blz. 60).
P beweert: $p \to ((p \to (p \to q)) \to q)$.
Het spel kan nu als volgt verlopen.

O	P
	$p \to ((p \to (p \to q)) \to q)$
1 p	2 $(p \to (p \to q)) \to q$
3 $p \to (p \to q)$	8 q
5 $p \to q$	4 p
7 q	6 p

Toelichting. O begint de gestelde bewering aan te vechten door p te beweren. P verdedigt met $(p \to (p \to q)) \to q$. O valt opnieuw aan met $p \to (p \to q)$. Nu gaat P over tot een contra-attaque en poneert p. Waarna O zich verdedigt met $p \to q$. Weer P in de aanval met p en O in de verdediging met q. En ten slotte zegt P nu in 8 q en heeft daarmee 2 tegen de aanval 3 verdedigt. P is dus geslaagd in de verdediging van zijn bewering. Toch zit in het geheel nog iets raars. In 7 heeft O gezegd q ter verdediging tegen de aanval in 6 op 5. Daarvan maakt P handig gebruik en zegt in 8 ook q, onder het motto van: dat heb je zelf gezegd. Vind je dit niet gek, dan accepteer je deze spelmethode. Dat leidt tot de klassieke (tweewaardige) logica. Vind je het wel gek, dan moet je de spelregels verscherpen. De auteurs doen dat en komen zo tot de intuïtionistische logica.
Onnodig te zeggen dat ik hiermee slechts een tip van de sluier opgelicht heb. Wilt u de rest onder de sluier ook zien, dan rest slechts het boek zelf ter hand te nemen. Daarbij nog één raad. De artikelen van Lorenzen zijn zeer helder geschreven en geven in kort bestek een goed inzicht in het wezenlijke waarom het gaat. Lorenz heeft een veel moeilijker betoogtrant, gaat op de details diep in. Wie technisch de methode wil doorgronden doet er verstandig aan ook zijn artikelen door te nemen.

P. G. J. Vredenduin.

U. Stammbach, *Lineare Algebra*, Teubner Studienskripten, Stuttgart 1980, 258 blz., DM 14.80.

Dit boek geeft een zeer bruikbare inleiding in de lineaire algebra. Het is helder geschreven, de stof is overzichtelijk gerangschikt.
Nadat de noodzakelijke grondbegrippen aangebracht zijn, worden de lineaire afbeeldingen behandeld. Dit hoofdstuk wordt afgesloten met de algebra van de lineaire afbeeldingen van een vectorruimte in zichzelf. Op natuurlijke wijze blijkt hier het belang van eigenvectoren en eigenwaarden.
In het volgende hoofdstuk maken we kennis met de determinantfunctie, een multilineaire functie van een geordend n-tal vectoren in R_n die gelijk aan 0 is zodra twee vectoren gelijk zijn. De samenhang met het voorgaande blijkt al spoedig.
In hoofdstuk 5 wordt begonnen met de euclidische vectorruimten, d.z. de vectorruimten over $\mathbb{R}$ voorzien van een inprodukt. De schrijver schakelt hier echter direct over op de unitaire ruimten, d.z. de vectorruimten over $\mathbb{C}$ voorzien van een inprodukt waarvoor geldt dat $V \cdot W$ en $W \cdot V$ toegevoegd complex zijn. De euclidische ruimten zijn een bijzonder geval van de unitaire en vereisen daarom geen afzonderlijke behandeling. Deze behandelingswijze is zonder twijfel economisch, maar vergemakkelijkt het inzicht niet van degeen die zich voor het eerst met deze materie bezighoudt.
Ten slotte een kort hoofdstuk over bilineaire vormen met als sluitstuk de classificatie van de

tweedegraadsoppervlakken in R_3. De pooltheorie valt buiten het kader van dit hoofdstuk.
Voor velen zal kennisname van dit boekje op plezierige wijze verbreding en verdieping van hun kennis met zich meebrengen.
Het boek is bij elk onderdeel goed voorzien van voorbeelden en opgaven.

P. G. J. Vredenduin

Georg Aumann, Otto Haupt, *Einführung in die reelle Analysis*, deel I en II, 3e druk, Walter de Gruyter, Berlijn, 1979, resp. 320 blz. en 314 blz., resp. DM 98,– en DM 128,–.

De beide delen hebben resp. de volgende ondertitels:
I. Funktionen einer reellen Veränderlichen en
II. Differentialrechnung der Funktionen mehrerer Veränderlicher.
waardoor reeds een duidelijke aanwijzing gegeven wordt van de indeling van de stof. Ten opzichte van de vorige drukken hebben de schrijvers enige wijzigingen aangebracht zonder evenwel het doel van het totale werk aan te tasten, t.w. een grondige inleiding in de reële analyse te geven. Grondig wil in dit verband zeggen dat de relatie naar andere delen der wiskunde duidelijk wordt gemaakt. Sterker: de schrijvers maken een grondig en functioneel gebruik van algebraïsche en topologische begrippen en werkwijzen. Hoewel het werk daardoor wat minder geschikt lijkt voor een éérste kennismaking met de analyse is het toch een buitengewoon aantrekkelijk leerboek geworden, dat z'n plaats ten volle verdient in de pre-kandidaatsfase. Naast enige kennis van de algebra en de topologie dient de lezer tevens vertrouwd te zijn met de grondbeginselen der logica. De schrijvers lichten de theorie aan de hand van vele voorbeelden toe. Tevens wordt de lezer opgewekt de talrijke vraagstukken te maken.
Deel I is voornamelijk gewijd aan reële functies van één reële veranderlijke. Na de opbouw van het reële getallenlichaam in het eerste en het tweede gedeelte waarbij tevens aandacht wordt geschonken aan rijen, convergentie en een topologie op $\mathbb{R}$ volgen in het derde gedeelte beschouwingen over reële functies van één reële veranderlijke. Continuïteit, monotonie, machtreeksen, uniforme convergentie, trapfuncties, functies van begrensde variatie zijn enige onderwerpen die hier ter sprake komen. Het laatste gedeelte houdt zich bezig met de ontwikkeling van de differentiaalrekening en de opbouw van het integraalbegrip (Riemann integraal).
Deel II begint in het eerste gedeelte met enige lineaire en multilineaire algebra en wat topologie. Het tweede gedeelte behandelt de reële functies waarbij o.a. ter sprake komen Lipschitz-afbeeldingen, convexe functies, dubbellimieten. Het laatste gedeelte behandelt de differentiaalrekening van de afbeelding van $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^k$. (extrema, partiële differentiaalvergelijkingen, kriterium van Carathéodory etc.)
De integraalrekening zal in deel III behandeld worden.
De beide boeken vormen een werk van grote klasse.
Aan de presentatie van het geheel is de uiterste zorg besteed. De uitvoering is keurig.
Een buitengewoon goede inleiding in de reële analyse.

W. Kleijne.

Mededelingen

VVWL-studiedag Wilrijk, 11 december 1982

De VVWL houdt op *zaterdag 11 december 1982* een studiedag in de Aula Major van de Universitaire Instelling Antwerpen (adres: UIA Universiteitsplein 1, Wilrijk).
Thema: Getallenleer en Algebra
agenda
vanaf 9.30: ontvangst
10.00: opening door voorzitter Frank Laforce
10.10: spreekbeurt door Robert Genbrugge (K.A. Deurne) *Vorming via rekenvaardigheden.*
11.20: spreekbeurt door Prof. dr. Hendrik W. Lenstra Jr. (Universiteit van Amsterdam): *Grote priemgetallen.*
12.45: lunch
14.30: spreekbeurt door Prof. dr. Alfons Ooms (Limburgs Universitair Centrum): *Enkele eenvoudige toepassingen van groepen en ringen.*
16.00: sluiting
Wie aan de gemeenschappelijke lunch in het restaurant van de UIA deel wil nemen wordt verzocht zich tijdig en in elk geval vóór 27 november aan te melden door overschrijving van 280fr. (drank, koffie en bediening inbegrepen) op prk. 000-1116247-68 van VVWL, Hoge Aardstraat 44, 2610 Wilrijk, onder vermelding 'lunch 11 dec.'.
Treinreizigers: aan het Antwerps Centraalstation neemt u de autobus *17 met bestemming UIA* (afstappen bij gebouw D).

Tijdschriften voor Mozambique

Nadat het Portugese bewind zich teruggetrokken had, zag de nieuwe regering van Mozambique zich geplaatst vóór een zeer gebrekkige onderwijssituatie met een enorm tekort aan leerkrachten. Het opzetten van onderwijs en lerarenopleiding is direct ter hand genomen, mede met buitenlandse hulp. Een van de buitenlanders die daar werkt, is de Nederlander Paulus Gerdes. Hij is hoofd van de afdeling wis- en natuurkunde van de Eduardo Mondlane Universiteit te Maputo. Als zodanig is hij direct betrokken bij de opleiding voor leraren wis- en natuurkunde. De universiteit en de lerarenopleiding hebben te kampen met een groot gebrek aan middelen. In dat verband heeft Gerdes geschreven, dat een schenking van 'overtollige' jaargangen van tijdschriften aan de bibliotheken in Mozambique zeer welkom zou zijn.
Het betreft hier de volgende tijdschriften: American Mathematical Monthly, Mathematical Reviews, The Arithmetic Teacher, Educational Studies in Mathematics, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Investigations in Mathematics Education, Journal for Research in Mathematics Education, Journal of Mathematical Modelling for Teachers, The Journal of Childrens Mathematical Behaviour, Mathematical Education for Teaching, Mathematics Teaching, The Mathematics Teacher, UMAP-Journal.
Mocht u voor dit doel iets beschikbaar hebben, wilt u dit dan doorgeven aan J. J. Sloff, Mathematisch Instituut, Postbus 800, 9700 AV Groningen. De NUFFIC zorgt er voor dat de tijdschriften ter plaatse komen.

J. J. Sloff

De leesportefeuille

Met ingang van januari 1983 zal de bijdrage voor deelname aan de leesportefeuille een geringe verhoging ondergaan:
Een leesabonnement op één tijdschrift gaat *f* 4,– per jaar kosten.

Een leesabonnement op twee of meer tijdschriften kost in het vervolg *f* 3,– per tijdschrift per jaar. Dit geldt voortaan ook voor de tijdschriften 'i' en 'j' (uitgaven van het Wiskundig Genootschap). De leesgelden dekken natuurlijk bij lange na niet de kosten van de leesportefeuille. Toch is er van afgezien om een nog hoger leesgeld te vragen. Immers, elke lezer heeft ook te maken met de niet te gering te schatten portokosten voor doorzending (meestal *f* 2,10 per nummer).
Het is goed, dat aspirant-deelnemers dit duidelijk beseffen, alvorens zich aan te melden. Soms is het mogelijk om in de naaste omgeving één of meer collega's te vinden, die een leesabonnement op hetzelfde tijdschrift hebben. In dat geval kan men de tijdschriftnummers aan elkaar doorgeven en de portokosten gezamenlijk dragen. Dit gebeurt nu reeds in een aantal gevallen en de circulatielijst is speciaal voor dit doel aangepast.

Overzicht van de in circulatie gebrachte tijdschriften:
a. Elemente der Mathematik, Basel (6 × 24)
b. The mathematical gazette, Leicester (4 × 80)
c. The mathematics teacher, Reston, Virginia (9 × 80)
d. Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, Bonn (8 × 64)
e. Pedagogische studiën, Groningen (12 × 40)
f. Mathematische Semesterberichte, Göttingen (2 × 160)
g. Schoolscience and mathematics, Indiana, Pennsylvania (8 × 90)
h. Wiskunde en onderwijs, Wilrijk (4 × 130)
i. Mededelingen van het wiskundig genootschap, Amsterdam (9 × 40)
j. Nieuw archief voor wiskunde, Amsterdam (3 × 160)
k. Bulletin de l'association des professeurs de mathematiques, Paris (5 × 160)
l. Praxis der Mathematik, Köln (12 × 32)
m. Educational studies in mathematics, Dordrecht (4 × 125)
n. Didaktik der Mathematik, München (4 × 85)

(Tussen haakjes is aangegeven het aantal nummers per jaar × het gemiddelde aantal bladzijden per nummer)
Voor meer informatie over de leesportefeuille kan men zich wenden tot de verzorger:
A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel.: 08819-2402

Achtste gemeenschappelijke studiedag NVvW-VVWL

De achtste gemeenschappelijke studiedag van de Nederlandse en de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraren(-raars) zal plaats hebben op zaterdag 26 maart te Kapellen (tussen Antwerpen en Roosendaal), aanvang 10.30.
Het programma luidt:
1 Leren wat een bewijs is; inleiding en bespreking in studiegroepen.
2 Een onderwerp uit de geschiedenis betreffende Gauss; spreker Herman van Looy.
Nadere mededelingen volgen.
Wilt u deze dag reeds in uw agenda noteren?

Het bestuur

Wiskunde & Onderwijs

De kosten voor het abonnement op Wiskunde & Onderwijs, het tijdschrift van onze zusterorganisatie in Vlaanderen, bedraagt voor 1983 *f* 23,–. Voor dit bedrag is u tevens lid van de VVWL. Zoudt u dit bedrag willen storten voor 1 januari a.s. op giro 933434 t.n.v. de penningmeester van Euclides te Doorwerth?

Nieuwe abonnees kunnen zich opgeven door storting van dit bedrag met bijschrift 'nieuw abonnee'. Het tijdschrift verschijnt vier keer per jaar; elk nummer heeft een omvang van ongeveer 150 blz. De inhoud is stellig de moeite waard.

P. G. J. Vredenduin

INHOUD

ADRESSEN VAN AUTEURS

H. Boertien, Cito, postbus 1034, 6801 MG Arnhem

W. J. Bos, Jonkerlaan 33, 2242 GB Wassenaar

O. Bottema, Ch. de Bourbonstraat 7, 2628 BN Delft

H. Broekman, Ped. Did. Inst. der R.U. Utrecht, Heidelberglaan 2, 3508 TC Utrecht

A. J. Th. Maassen, Bosboomstraat 20, Arnhem

F. Meester, Waalstraat 118III, 1079 EC Amsterdam

E. de Moor, Prinsengracht 701, 1017 JV Amsterdam

P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth